

P

Phys. sp.

181

lv

Phys. sp.
40
181 - 6

Neumann, F. E.

Über
ein allgemeines
Princip der mathematischen Theorie
inducirter elektrischer Ströme

von

F. E. NEUMANN

Ritter des rothen Adlerordens vierter Classe, ordentlichem Professor der Mineralogie und Physik
an der Königsberger Universität, Correspondenten der Berliner und Petersburger
Akademie der Wissenschaften.

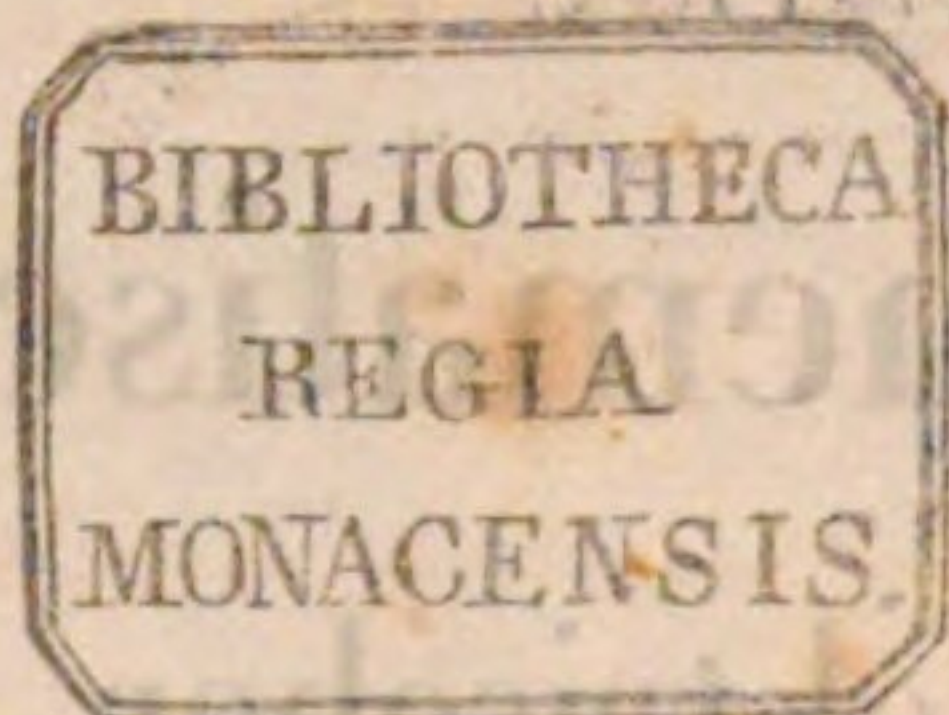
Vorgelesen in der Berliner Akademie der Wissenschaften am 9. August 1847.

Mit einer Kupfertafel.

Berlin
Verlag von G. Reimer
1848.

Akademische Buchdruckerei.

22. 85.



F. E. NEUMANN

Unter der Leitung des hiesigen Lehrers, des hiesigen Professors der Mineralogie und Physik
an der Königsberger Universität, Correspondenten der Berliner und Potsdamer
Akademie der Wissenschaften

Vorgelesen in der Berliner Akademie der Wissenschaften am 9. August 1847

Mit einer Kupfertafel

Berlin
Verlag von G. Reimer

1848

In meiner Abhandlung über die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme ⁽¹⁾ habe ich die Fälle von linearen Induktionen behandelt, in welchen die gegenseitige Lage der Elemente der bewegten Stücke unverändert bleibt, diese also nicht ihre Form, nur ihre Lage verändern, die Stücke mochten übrigens dem inducirten Leiter-System oder dem inducirenden Strom-System angehören. In der vorliegenden Abhandlung findet in Beziehung auf die Bewegung der Elemente eines jeden der beiden Systeme keine andere Beschränkung statt, als die, welche für das Zustandekommen von inducirten Strömen überhaupt nothwendig ist, nemlich daß die Elemente eines jeden der beiden Systeme während ihrer Bewegung unter einander in leitender Verbindung bleiben. Diese weitere Entwicklung des in der frühern Abhandlung zum Grunde gelegten Induktions-Gesetzes hat zu einem so einfachen und allgemeinen Theorem geführt, daß dieses jetzt als ein Princip der mathematischen Theorie der inducirten elektrischen Ströme angesehen werden kann.

Dies Theorem läßt sich so aussprechen:
Wird ein geschlossenes, unverzweigtes, leitendes Bogensystem A , durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente, aber ohne Aufhebung der leitenden Verbin-

⁽¹⁾ Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme von F. E. Neumann. Aus den Schriften der Berlin. Akad. d. W. von 1845 besonders abgedruckt. Reimer 1846.

dung derselben, in ein anderes A'' , von neuer Form und Lage übergeführt, und geschieht diese Veränderung von A , in A'' , unter dem Einfluß eines elektrischen Strom-Systems B , welches gleichzeitig durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente eine Veränderung in Lage, Form und Intensität von B , in B'' , erfährt, so ist die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche in dem leitenden Bogensystem durch diese Veränderungen inducirt worden sind, gleich dem mit der Induktions-Constante ϵ multiplicirten Unterschied der Potentialwerthe des Stromes B'' , in Bezug auf A'' , und des Stroms B , in Bezug auf A , wenn A'' und A , von der Strom-Einheit durchströmt gedacht werden.

Der vorstehende Ausdruck des Theorems setzt voraus, daß das inducirte Leiter-System ohne Verzweigungen ist, und dem inducirten Strome also nur eine ungetheilte Bahn bietet. Hat das Leiter-System Verzweigungen, so muß man dasselbe sich in geschlossene unverzweigte Umgänge zerlegt denken, und auf jeden dieser Umgänge, als wäre er nur allein vorhanden, das Theorem anwenden. Dadurch erhält man die Summe der in jedem dieser einfachen Umgänge inducirten elektromotorischen Kräfte, und dies ist diejenige Gröfse, deren Kenntniß nöthig und hinreichend ist um, wenn die Leitungswiderstände gegeben sind, die Stärke des inducirten Stromes in jedem Theile des Leiter-Systems zu bestimmen. In dieser Erweiterung giebt das vorstehende Theorem unmittelbar den Ausdruck der electromotorischen Kräfte in allen Fällen von linearen Induktionen, welche durch Veränderungen der Stromstärke und der relativen Lage der Strom-Elemente in Bezug auf die Elemente eines beliebig verzweigten Leiter-Systems in diesem erregt werden, die Fälle nicht ausgeschlossen, in welchen durch Verrückung von Stromstücken oder Stücken des Leiter-Systems Elemente aus der Bahn des inducirenden oder des inducirten Stromes heraustreten, oder eintreten. Die Gesetze der Magneto-Induktion sind als ein besonderer Fall in dem Theorem enthalten. Nicht unter diesem Theorem begriffen sind die Fälle, wo ein so rascher Wechsel der inducirenden Ursache stattfindet, daß in dem inducirten Strom keine gleichförmige Strömung angenommen werden darf, wie z. B. bei den elektrischen Entladungen.

Der Potentialwerth eines geschlossenen elektrischen Stromsystems in Bezug auf ein anderes geschlossenes Stromsystem ist die negative halbe Summe der Produkte der Bahnelemente des einen Systems mit den Bahnelementen des andern, jedes Produkt zweier Elemente mit ihren Intensitäten und dem Cosinus ihrer Neigung gegeneinander multiplicirt, und durch ihre gegenseitige Entfernung dividirt. ⁽¹⁾

Es sei $D\sigma$, ein Element der inducirenden Strombahn B , in der Anfangsposition ihrer Elemente, i , die Stromstärke in $D\sigma$; es sei ferner Ds , ein Element des inducirten Leiter-Umgangs A , in seiner Anfangsposition und $(D\sigma, Ds)$ bezeichne die Neigung von $D\sigma$, gegen Ds , so wie r , die gegenseitige Entfernung dieser Elemente. Durch $Q(\sigma, s)$ werde der Potentialwerth des Stromes B , in Bezug auf den von der Strom-Einheit durchströmten Umgang A , bezeichnet. Für die Endpositionen B'' und A'' sollen i'' , $D\sigma''$, Ds'' , r'' die entsprechende Bedeutung haben. Dann ist

$$Q(\sigma, s) = -\frac{1}{2} S \sum i \frac{\cos(D\sigma, Ds)}{r} D\sigma Ds,$$

$$Q(\sigma'', s'') = -\frac{1}{2} S \sum i'' \frac{\cos(D\sigma'', Ds'')}{r''} D\sigma'' Ds''$$

worin die mit S und $\sum$ bezeichneten Integrationen auf alle Elemente Ds des inducirten Leiterumganges und alle Elemente $D\sigma$ des inducirenden Stromsystems auszudehnen sind.

Die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche während die Strom- und Leiter-Elemente aus ihren Anfangszuständen in ihre Endzustände übergegangen sind, inducirt worden sind, ist nach dem vorstehenden Theorem

$$\varepsilon \{Q(\sigma'', s'') - Q(\sigma, s)\} \quad (1)$$

wofür ich auch schreibe

$$-\frac{1}{2} \varepsilon S \sum \left[\frac{i \cos(D\sigma, Ds)}{r} \right]'' D\sigma Ds \quad (2)$$

worin die Klammer $[\]''$ die Differenz der Werthe bezeichnen soll, welche die von ihr eingeschlossene Gröfse in den Endpositionen der Strom- und Leiter-Elemente und in den Anfangspositionen besitzt. Diese Grenz-Positionen werden durch die der Klammer oben und unten zugefügten Indices angedeutet.

(¹) Siehe hinten die der Abhandlung beigelegte Note.

Aus dem vorstehenden Ausdruck für die inducirte elektromotorische Kraft kann man leicht einen eben so allgemeinen Ausdruck für den in dem Leiter-Umgang A inducirten Strom ableiten. Zu diesem Ende betrachten wir als Anfangs- und Endposition der Strom- und Leiter-Elemente zwei sehr wenig von einander verschiedene Positionen derselben, welche zur Zeit t und $t + \partial t$ stattfinden, wo ∂t das Zeitelement bezeichnet. Die während dieses Zeitelements inducirte elektromotorische Kraft ist nach (2)

$$- \frac{1}{2} \epsilon S \sum \left[\frac{i \cos(D\sigma \cdot Ds)}{r} \right]_{t}^{t + \partial t} Ds D\sigma$$

und dafür kann man schreiben

$$(3) \quad - \frac{1}{2} \epsilon \partial t \frac{d}{dt} S \sum \frac{i \cos(Ds \cdot D\sigma)}{r} Ds D\sigma$$

Das Produkt dieser elektromotorischen Kraft mit dem reciproken Leitungswiderstand ϵ' des inducirten Leiters giebt den zur Zeit t vorhandenen inducirten Differentialstrom D . Wird dieses Produkt zwischen $t = t$, und $t = t''$ integrirt, so erhält man den in dem Zeitraum $t'' - t$, inducirten Integralstrom J . Man hat also:

$$(4) \quad D = - \frac{1}{2} \epsilon \epsilon' \partial t \frac{d}{dt} S \sum \frac{i \cos(Ds \cdot D\sigma)}{r} Ds D\sigma$$

$$(5) \quad J = - \frac{1}{2} \epsilon \int \partial t \epsilon' \frac{d}{dt} S \sum \frac{i \cos(Ds \cdot D\sigma)}{r} Ds D\sigma$$

Wenn die Verrückungen der Elemente des Leiters keine merkliche Veränderung des Leitungswiderstandes des inducirten Stroms herbeiführen, also ϵ' konstant ist, oder so angesehen werden kann, so hat der inducirte Integralstrom den Ausdruck:

$$(6) \quad J = - \frac{1}{2} \epsilon \epsilon' S \sum \left[\frac{i \cos(Ds \cdot D\sigma)}{r} \right]_{t}^{t''} Ds D\sigma$$

und dieser verwandelt sich, wenn der inducirende Strom unverzweigt ist in

$$(7) \quad J = - \frac{1}{2} \epsilon \epsilon' i S \sum \left[\frac{\cos Ds \cdot D\sigma}{r} \right]_{t}^{t''} Ds D\sigma$$

Die Ausdrücke der Stromstärken (4), (5), (6) und (7) setzen einen einfachen d. h. unverzweigten inducirten Leiter-Umgang voraus. Ist der inducirte Leiter verzweigt so müssen die Stromstärken in den einzelnen Zweigen nach den Sätzen von Kirchhoff mittelst des Ausdrucks (3) bestimmt werden, welcher dann auf die einzelnen einfachen Umgänge, die aus den Zweigen gebildet werden können, angewandt werden muß, und die in ihnen während des Zeit-Elements entwickelte elektromotorische Kraft giebt.

Die Absicht der vorliegenden Abhandlung ist die Ableitung des eben ausgesprochenen Theorems über die inducirte elektromotorische Kraft aus dem in meiner frühern Abhandlung zum Grunde gelegten Induktions-Gesetz. Ich habe dieselbe in fünf §§ getheilt.

§. 1. behandelt die Induktionsfälle, in welchen die Leiter-Elemente unter dem Einfluß eines ruhenden konstanten Stroms bewegt werden.

§. 2. behandelt die Fälle in welchen in einem ruhenden Leiter durch die Bewegung von Strom-Elementen Ströme inducirt werden.

§. 3. behandelt die durch gleichzeitige Bewegung der Strom- und Leiter-Elemente erregten Induktionen.

§. 4. handelt von den durch Veränderungen der Stromstärken und gleichzeitige Bewegungen der Strom- und Leiter-Elemente inducirten Strömen.

§. 5. untersucht in wieweit Übereinstimmung stattfindet zwischen dem oben ausgesprochenen Theorem und den neuen Grundsätzen über die Wirkung bewegter Elektricität in der Ferne, welche W. Weber in seinen elektrodynamischen Maafsbestimmungen ⁽¹⁾ gegeben hat.

§. 1.

In diesem § soll der Ausdruck für die Intensität der Ströme entwickelt werden, welche in einem linearen geschlossenen Leiter inducirt werden, wenn die Elemente desselben unter dem Einfluß eines ruhenden konstanten Stroms auf eine beliebige Weise aus einer Lage in eine andere geführt werden. Auf diesen Induktionsfall läßt sich unmittelbar derjenige zurückfüh-

⁽¹⁾ Electrodynamische Maasbestimmungen von W. Weber. Leipzig 1846. Besonders abgedruckt a. d. Schriften der Königl. Sächsischen Academie.

ren, in welchem außer den Leiter-Elementen auch die Strom-Elemente eine Bewegung besitzen, wenn diese von der Beschaffenheit ist, daß die gegenseitige Lage der Strom-Elemente dadurch nicht geändert wird. Man kann in diesem Falle dem Strom- und Leiter-System eine solche gemeinschaftliche Bewegung geben, daß der Strom ruht. Diese, beiden Systemen gemeinschaftliche Bewegung erregt keine Induktion.

Es seien $D\sigma$ und Ds Elemente der inducirenden Stromcurve und inducirten Leitercurve; die Coordinaten dieser Elemente seien ξ, η, ζ und x, y, z , ihre gegenseitige Entfernung r , wo also

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

Die Winkel welche r mit Ds und $D\sigma$ macht sollen mit ϑ und ϑ' bezeichnet werden, und der Winkel unter welchen diese Elemente gegeneinander geneigt sind, sei η . Die Geschwindigkeit, mit welcher Ds fortgeführt wird, sei v , sein Weg o , dessen Element ∂o , so daß $v = \frac{\partial o}{\partial t}$, wo ∂t das Element der Zeit bezeichnet. Die Geschwindigkeit v ist eine Funktion von s und t .

Nach dem in meiner frühern Abhandlung aufgestellten Induktions-Princip ist die während ∂t in dem Element Ds durch den Strom, unter dessen Einfluß es bewegt wird, inducirte elektromotorische Kraft $E Ds$ ausgedrückt durch

$$(1) \quad E Ds = - \varepsilon v C Ds \partial t$$

worin CDs die nach ∂o zerlegte Wirkung bezeichnet, welche der Strom auf das Element Ds ausübt, dieses von der Strom-Einheit durchströmt gedacht, und ε die Induktions-Konstante ist.

Nach Ampere's Gesetz hat die Wirkung welche das Strom-Element $D\sigma$ auf Ds ausübt, die Richtung von r , und ihr Werth ist, wenn j die Stromstärke von $D\sigma$ bezeichnet:

$$-j \frac{D\sigma Ds}{r^2} \left\{ \cos \eta - \frac{3}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta' \right\}$$

Das negative Vorzeichen ist dieser Wirkung gegeben, weil sie die Entfernung der Elemente zu verkleinern strebt. Der vorstehende Ausdruck läßt sich, wie Ampere gezeigt hat, durch partielle Differentialquotienten von r nach s und σ ausdrücken, und verwandelt sich dadurch in:

$$j \frac{D\sigma Ds}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{ds d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right\}$$

Diese Gröfse ist nun, um die Componente der Wirkung von $D\sigma$ auf Ds nach ∂o zu erhalten, mit dem Cosinus des Winkels zu multipliciren, unter welchem ∂o gegen r geneigt ist, d. i. ⁽¹⁾ mit $\frac{dr}{do}$. Die Summe dieser Componenten in Beziehung auf alle $D\sigma$ giebt die in (1) mit CDs bezeichnete Gröfse. Ich setze zunächst voraus, dafs sowohl der inducirende Strom als der inducirte unverzweigt ist. Die Fälle in welchen dieselben verzweigt sind, werde ich am Schlusse dieses § berücksichtigen. In dem vorausgesetzten Falle hat j in jedem $D\sigma$ denselben Werth, und man hat also:

$$CDs = jDs \sum \frac{D\sigma}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{ds d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right\} \frac{dr}{do} \quad (2)$$

Substituirt man diesen Werth von C in (1) und nimmt hierauf die Summe von EDs in Beziehung auf alle Ds , so erhält man die zur Zeit t während des Elements ∂t in dem ganzen Leiter s inducirte elektromotorische Kraft. Diese Summe mit dem reciproken Leitungswiderstand ϵ' des Leiters multiplicirt giebt, da der Leiter unverzweigt ist, den in ihm inducirten Differentialstrom D , und dieser, in Beziehung auf t von t , bis t_1 integrirt, giebt den in dem Zeitintervall $t_1 - t$ inducirten Integralstrom J . Demnach ist also

$$J = -\epsilon \int \partial t \epsilon' j S \sum \frac{D\sigma Ds}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{ds d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right\} \frac{dr}{do} v \quad (3)$$

oder

$$J = \int \partial t \epsilon' j \frac{d}{dt} E \quad (4)$$

wenn

$$E = -\epsilon \int S \sum \partial t \frac{D\sigma Ds}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{ds d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right\} \frac{dr}{do} v \quad (5)$$

gesetzt wird. Ich bemerke dafs der Ausdruck von J in (3) oder (4) nur den durch die Verrückung der Leiter-Elemente inducirten Strom giebt, von welchem in diesem § überall nur die Rede ist. Es wird nemlich, wenn j eine Funktion der Zeit ist, aufser diesem noch ein Strom durch die Veränderung von j inducirt, von welchem später in §.4. die Rede sein wird. Wenn ϵ' und j unabhängig von der Zeit sind, so ist $J = \epsilon \epsilon' j E$; es ist E also die Summe der elektromotorischen Kraft, welche in dem Zeitraum von t , bis

⁽¹⁾ Die partiellen Differentiationen werden in dieser Abhandlung immer durch die Charakteristik d bezeichnet werden.

$t_{\text{„}}$, wenn der inducirende Strom innerhalb desselben konstant und der Einheit gleich ist, in dem ganzen Leiter inducirt wird. Die durch den konstanten Strom von der Intensität j inducirte elektromotorische Kraft jE werde ich in der Folge durch F bezeichnen. Ich bemerke noch, daß, da in dem Zeit-Element ∂t durch die Verrückung der Leiter-Elemente die elektromotorische Kraft $j \frac{dE}{dt} \partial t$ inducirt wird, j mag variabel oder konstant sein, die in dem Zeitintervall von t , bis $t_{\text{„}}$ inducirte elektromotorische Kraft

allgemein ausgedrückt ist durch $\int_t^{t_{\text{„}}} \partial t j \frac{dE}{dt}$. Die nähere Ermittlung der

Größe E , welche ich, so lange kein Mißverständniß zu fürchten ist, schlechtweg die inducirte elektromotorische Kraft nennen werde, aus welcher, wie man sieht, durch einfache Differentiation und Integration sowohl die Summe der jedesmal wirklich inducirten elektromotorischen Kraft als der Differential- und Integralstrom abgeleitet werden können, ist die vorzüglichste Absicht des Folgenden.

Die durch Σ in (5) bezeichnete Integration ist auf alle $D\sigma$ der geschlossenen Bahn des inducirenden Stroms auszudehnen. Dasselbe gilt zwar von der durch S bezeichneten Integration in Beziehung auf die geschlossene Bahn des inducirten Stroms, aber diese zerfällt, wegen der Diskontinuität der bewegten Stücke, in mehrere kontinuierliche Leiterstücke, deren Grenzen von der Zeit abhängen können. Die durch S bezeichnete Integration ist demnach ein Aggregat von Integralen, deren jedes sich auf ein kontinuierliches Leiterstück bezieht. Um diese Bemerkung deutlicher durchführen zu können, werde ich der allgemeinen Betrachtung die eines speciellen Falls vorangehen lassen. Ich werde zuerst den Fall betrachten, in welchem ein Theil der Bahn des inducirten Stroms ruht, und der andere, ein kontinuierliches Leiterstück bildend, bewegt wird. Die Grenzen dieses bewegten Stücks sollen zunächst unabhängig von der Zeit sein d. h. sie sollen durch dieselben Elemente während der ganzen Dauer der Bewegung gebildet werden. Um die Vorstellung zu fixiren, stelle Fig. 1 einen solchen Fall vor, wo $a b c d$ die Bahn des inducirten Stroms zur Zeit t bezeichnet. Die Induktion ist dadurch hervorgebracht daß das Leiterstück $b c d$ aus seiner anfänglichen Lage b, c, d , in die Lage $b_{\text{„}}, c_{\text{„}}, d_{\text{„}}$ fortgeführt ist, und zwar so daß dieselben Elemente b und d mit den Unterlagen $b, b_{\text{„}}$ und $d, d_{\text{„}}$ in leitender Verbindung geblieben sind,

wobei die Form des bewegten Stücks eine beliebige Veränderung erlitten haben kann. Die durch S bezeichnete Integration bezieht sich in diesem Falle allein auf das bewegte Stück $b c d$, weil für die übrigen Theile der Bahn des inducirten Stroms $v = 0$ ist.

Ich setze in (5) statt v seinen Werth $\frac{do}{dt}$, wodurch

$$E = -\varepsilon \int S \Sigma \frac{\partial o Ds D\sigma}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{ds d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right\} \frac{dr}{do} \quad (6)$$

wird, und integriere das erste Glied rechts partiell nach s . Dadurch verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$E = -\varepsilon \int \Sigma \partial o Ds \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{do} \frac{dr}{ds} \right]_{s_1}^{s_2} \quad (7)$$

$$+ \varepsilon \int \Sigma S \frac{\partial o D\sigma Ds}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{do ds} - \frac{1}{2} \frac{dr}{do} \frac{dr}{ds} \right\} \frac{dr}{d\sigma}$$

worin $\left[\frac{1}{r} \frac{dr}{do} \frac{dr}{ds} \right]_{s_1}^{s_2}$ die Differenz der Werthe bezeichnet, welche die eingeschlossene Gröfse in den Endpunkten des bewegten Leiterstücks welche durch s_2 und s_1 bezeichnet sind, d.i. nach der Figur in d und b besitzt.

Durch partielle Integration des Gliedes

$$\varepsilon \int \Sigma S \frac{do Dr Ds}{r} \frac{d^2 r}{do ds} \frac{dr}{d\sigma}$$

in der vorstehenden Gleichung nach o verwandelt sich dieselbe in

$$E = -\varepsilon \int \Sigma \partial o Ds \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{do} \frac{dr}{ds} \right]_{s_1}^{s_2} \quad (8)$$

$$+ \varepsilon \Sigma S Ds D\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{o_1}^{o_2}$$

$$- \varepsilon \int \Sigma S \frac{\partial o D\sigma Ds}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{do d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{dr}{do} \frac{dr}{d\sigma} \right\} \frac{dr}{ds}$$

wo $\left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{o_1}^{o_2}$ die Differenz der Werthe bezeichnet, welche die eingeschlossene Gröfse in der End- und Anfangs-Position des bewegten Leiter-

stücks besitzt d.i. in der Lage $b,, c,, d,,$ und $b, c, d,$. Es sind $o,,$ und $o,$ die Grenzen des Weges, welchen Ds beschrieben hat.

In diesem Ausdruck für E integriere ich endlich partiell nach σ das erste Glied unter dem dreifachen Integralzeichen

$$\epsilon \int \sum S \frac{\partial o D\sigma Ds}{r} \frac{d^2 r}{do ds} \frac{dr}{ds}$$

Ich lasse, behufs spätern Gebrauchs, die Grenzen dieser Integration zunächst unbestimmt, und bezeichne sie mit $\sigma,,$ und $\sigma,$. Die Gleichung (8) verwandelt sich dadurch in

$$(9) \quad E = -\epsilon \int \sum \partial o D\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{do} \frac{dr}{ds} \right]_{\sigma,}^{\sigma,,} \\ + \epsilon \sum S D\sigma Ds \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{\sigma,,}^{\sigma,} \\ - \epsilon \int S \partial o Ds \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{do} \frac{dr}{ds} \right]_{\sigma,,}^{\sigma,} \\ + \epsilon \int S \sum \frac{\partial o Ds D\sigma}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{ds d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right\} \frac{dr}{do}$$

worin die Bedeutung der Klammer mit den Indices $\sigma,,$ und $\sigma,$ schon aus dem Vorhergehenden klar ist.

Addirt man diesen Ausdruck für E zu demjenigen in (5) so verschwinden die Glieder welche von dreifachen Integrationen abhängen, und man erhält den Werth von E durch sechs Doppelintegrale ausgedrückt:

$$(10) \quad E = -\frac{1}{2} \epsilon \int \sum \partial o D\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{do} \frac{dr}{ds} \right]_{\sigma,}^{\sigma,,} \\ + \frac{1}{2} \epsilon \sum S D\sigma Ds \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{\sigma,,}^{\sigma,} \\ - \frac{1}{2} \epsilon \int S \partial o Ds \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{do} \frac{dr}{ds} \right]_{\sigma,,}^{\sigma,}$$

In dem vorliegenden Falle, wo die Integration nach σ auf die ganze, geschlossene Bahn des inducirenden Stroms ausgedehnt werden muß, wo also σ'' und σ , zusammen fallen, verschwinden die beiden letzten Integrale, und man hat hier also

$$E = \frac{1}{2} \varepsilon S \sum Ds D\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{\sigma''}^{\sigma'} - \frac{1}{2} \varepsilon \int \sum \partial o D\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{do} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{s'}^{s''} \quad (11)$$

Dieser Ausdruck für die elektromotorische Kraft E , welche durch die Fortführung des Leiterstücks aus der Lage b, c, d , in die Lage b'', c'', d'' erregt ist, zeigt daß dieselbe von den Wegen, welche seine Theile beschrieben haben, unabhängig ist, und also unabhängig von den Formen, welche seine Curve während der Bewegung gehabt hat. Die elektromotorische Kraft E hängt allein von der Lage und Form des bewegten Leiterstücks in seiner Anfangs- und End-Position ab und von den zwei Curven auf welchen seine Endpunkte fortgeführt sind. Nennen wir p die Peripherie des Curven-Vierecks b, b'', c'', d'', d, c , welches von dem bewegten Leiterstück in seiner Anfangs- und Endposition und den zwei Curven, welche seine Endpunkte beschrieben haben, gebildet wird, und Dp ein Element dieser Peripherie, so kann man statt (11) schreiben

$$E = \frac{1}{2} \varepsilon S \sum \frac{D\sigma Dp}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{dp} \quad (12)$$

wo die Integrationen nach $D\sigma$ und Dp respektive auf die ganze Bahn des inducirenden Stroms σ und die ganze Peripherie p des bezeichneten Curvenvierecks ausgedehnt werden müssen. Die Richtung, in welcher man bei der Integration nach Dp , als der positiven fortzuschreiten hat, ist die positive des bewegten Leiterstücks in seiner Endposition. Integrirt man das Integral in (12) partiell nach σ , nachdem man unter dem Integralzeichen statt $\frac{1}{r} \frac{dr}{dp}$ gesetzt hat $\frac{1}{2r^2} \frac{dr^2}{dp}$, so erhält man

$$E = - \frac{1}{4} \varepsilon S Dp \left[\frac{1}{r} \frac{dr^2}{dp} \right]_{\sigma'}^{\sigma''} + \frac{1}{4} \varepsilon S \sum \frac{1}{r} \frac{d^2 r^2}{d\sigma dp} D\sigma Dp \quad (13)$$

und dieser Ausdruck reduzirt sich, weil σ , und $\sigma_{\text{„}}$ in der geschlossenen inducirenden Stromcurve zusammenfallen, auf

$$E = \frac{1}{4} \varepsilon S \sum \frac{1}{r} \frac{d^2 r^2}{d\sigma dp} D\sigma Dp$$

Aus $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$ erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r^2}{d\sigma dp} &= -2 \left(\frac{dx d\xi + dy d\eta + dz d\zeta}{d\sigma dp} \right) \\ &= -2 \cos (D\sigma, Dp) \end{aligned}$$

wo $(D\sigma, Dp)$ den Winkel bezeichnet, unter welchen die Elemente $D\sigma$ und Dp gegeneinander geneigt sind.

Substituirt man diesen Werth von $\frac{d^2 r^2}{d\sigma dp}$ in E so wird sein Ausdruck:

$$(13) \quad E = -\frac{1}{2} \varepsilon S \sum \frac{D\sigma Dp}{r} \cos (D\sigma, Dp)$$

Hieraus geht hervor daß die durch die Fortführung des Leiterstücks inducirte elektromotorische Kraft E gleich ist dem mit ε multiplicirten Potential der inducirenden Stromcurve in Bezug auf das Curven-Viereck, welches die von dem Leiter beschriebene Fläche begränzt, die Stromcurve sowohl als dies Viereck von der Strom-Einheit durchströmt gedacht, und zwar letzteres in der positiven Richtung des bewegten Leiterstücks in seiner Endposition.

Bei der Ableitung der Gleichungen (12) und (13) aus (11) ist das bewegte Leiterstück als ein unverzweigtes vorausgesetzt d.h. von der Beschaffenheit daß man von seinem einem Ende zu seinem andern nur auf einem Wege gelangen kann. Ohne diese Voraussetzung kann man nicht von einem Curvenviereck sprechen. Unter dieser Voraussetzung aber ist das Potential des inducirenden Stroms in Bezug auf das bezeichnete Curvenviereck die Differenz der Werthe welche das Potential der Stromcurve in Bezug auf die ganze Bahncurve des inducirten Stroms in ihrer End- und Anfangs-Position besitzt, diese Curven von der Strom-Einheit durchströmt gedacht. Nennen wir s , die Bahn des inducirten Stroms in ihrer Anfangsposition, $s_{\text{„}}$ in ihrer Endposition, und ς die Bahn des inducirenden Stroms, und bezeichnen wir durch $P(\varsigma, s)$ und $P(\varsigma, s_{\text{„}})$ die Potentialwerthe von ς in Bezug auf s , und $s_{\text{„}}$, so ist

$$(14) \quad E = \varepsilon \{P(\varsigma, s_{\text{„}}) - P(\varsigma, s)\}$$

Die Formel (11) ist, wenn die Bedeutung der Grenzen $s, s,, o, o,,$ gehörig berücksichtigt wird, der allgemeine Ausdruck für die elektromotorische Kraft, welche durch einen ruhenden Strom in einem bewegten Leiterstück inducirt wird. Aus ihr ergaben sich die Sätze, welche durch die Gleichungen (12), (13) und (14) ausgedrückt sind, unter der Annahme, daß das bewegte Stück in denselben End-Elementen während seiner Bewegung mit dem ruhenden Theile der Bahn des inducirten Stroms in leitender Verbindung bleibe. Ich werde jetzt nachweisen daß diese Sätze auch gelten wenn nach und nach andere Elemente des bewegten Stücks mit dem ruhenden Theile des Leiters in leitende Verbindung treten.

Es sei in Fig. 2, welche einen solchen Fall andeuten soll, $a b, d$, der inducirte Leiter in seiner Anfangs-Position, und $a b,, d,,$ in seiner End-Position. Die Induction ist durch die Fortführung der Elemente des Leiterstücks bd aus der Lage b, d , in die Lage $b,, d,,$ erregt; bei dieser Fortführung des Stücks bd wobei seine Form sich auf eine beliebige Weise verändern kann, sind nach und nach andere Elemente desselben mit den ruhenden Unterlagen $b, b,,$ und $d, d,,$ in leitende Berührung gebracht, so daß z. B. die Elemente in β und δ , welche im Anfang der Bewegung außerhalb der Bahn des inducirten Stroms sich befanden, erst am Schlusse derselben eingetreten sind.

Bei der Anwendung des allgemeinen Ausdrucks für E in (5) oder in (6) auf diesen Fall, ist zu bemerken daß die Integration S , welche sich auf die bewegten Elemente Ds bezieht, zwischen den Grenzen b und d zu nehmen ist, welche jetzt Funktionen der Zeit t sind, oder, wenn o wiederum den Weg bezeichnet, auf welchem Ds fortgeführt wird, Funktionen von o . Man kann die hieraus sich ergebende Reihenfolge der Integrationen nach Ds und ∂o vermeiden. Zu dem Ende ist für alle Elemente des bewegten Leiterstücks, welche sich von Anfang bis zum Ende ihrer Bewegung innerhalb der Schließung des inducirten Stroms befinden, die Integration nach ∂t in (5) von t , bis $t,,$ oder die Integration nach ∂o in (6) von o , bis $o,,$ auszu dehnen, wenn $t, t,,$ und $o, o,,$ die Grenzen respektive der Zeit und der Bahn ihrer ganzen Bewegung sind, für die Elemente Ds aber, welche sich nur auf einem Theile ihrer Bahn innerhalb der Schließung des inducirten Stroms befinden ist die Integration nach ∂o auf diesen Theil zu beschränken, und die Integration nach ∂t in (5) auf die Zeit, während welcher sie diesen Theil ihrer ganzen Bahn beschrieben haben.

Der einfachern Darstellung wegen will ich annehmen ein solches Element Ds trete, nachdem es den Weg von o , bis q durchlaufen hat, in die Schließung des inducirten Stroms ein, und bleibe nun bis zum Schlusse der Bewegung innerhalb derselben, beschreibe also innerhalb der Schließung den Weg von q bis o'' . Die Betrachtung eines solchen speciellen Falles ist hinreichend um die zusammengesetzten Fälle zu beurtheilen, wo das Element, ehe es das Ende seiner Bahn erreicht, aus der Schließung wieder austritt, oder wo dieser Eintritt und Austritt sich wiederholt.

Mit Berücksichtigung der vorstehenden Bemerkung verwandelt sich der Ausdruck von E in (11) im vorliegenden Falle in

$$(15) \quad E = \frac{1}{2} \varepsilon S \sum D\sigma Ds \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{o''}^{o''} \\ + \frac{1}{2} \varepsilon S \sum D\sigma Ds \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{o''}^{o''} \\ - \frac{1}{2} \varepsilon \int \sum \partial o D\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{s'}^{q}$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks für E bezieht sich auf alle Elemente Ds , welche sich während der ganzen Dauer ihrer Bewegung innerhalb der Schließung des inducirten Stroms befinden, das zweite umfaßt diejenigen Elemente Ds welche erst nachdem sie den Weg von o , bis q durchlaufen haben, in diese Schließung eintreten, und nun darin bleiben. In dem dritten Gliede bezeichnen s , und s'' die Stellen der Grenzelemente des bewegten Leiterstücks, welche, nachdem sie den Weg von o , bis q durchlaufen haben, in die Schließung des inducirten Stroms eingetreten sind.

Nach der Bedeutung der Klammern $\left[\right]_{o''}^{o''}$ ist das zweite Glied in (15) gleichbedeutend mit

$$(16) \quad \frac{1}{2} \varepsilon S \sum Ds D\sigma \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right)_{o''} - \frac{1}{2} \varepsilon S \sum Ds D\sigma \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right)_q$$

wo die den Parenthesen als Indices zugefügten Größen o'' und q die Stellen

der Bahn von Ds bezeichnen, an welchen sich dieses Element bei den nach Ds auszuführenden Integrationen befinden soll. Der erste Theil dieses Ausdrucks kann mit dem ersten Gliede rechts in (15) zusammengefaßt werden, so daß dann in diesem die Integration nach Ds ebenso auf alle Elemente des bewegten Leiterstücks, welche sich am Schlusse der Bewegung in der Schließung befinden, auszudehnen ist, wie auf diejenigen, bei welchen dies im Anfang der Bewegung der Fall ist.

Der zweite Theil des vorstehenden Ausdrucks (16) bezieht sich auf die End-Elemente von s welche, nachdem sie den Weg q bis o , durchlaufen haben, in die Schließung eintreten; auf dieselben Elemente beziehen sich die Integrationen S in dem dritten Gliede in (15). Zieht man das zweite Glied aus (16) mit dem dritten Gliede in (15) zusammen, so erhält man sowohl für die Elemente Ds in $s_{\parallel}$ als für die in s , einen Ausdruck von der Form

$$-\frac{1}{2} \epsilon \Sigma D\sigma \left\{ S \frac{Ds}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\tau} + \int \frac{\partial o}{r} \frac{dr}{do} \frac{dr}{d\tau} \right\}$$

worin man statt S das Zeichen $\int$ setzen kann. Dadurch verwandelt sich die Summe des dritten Gliedes in (15) und des zweiten in (16) in

$$-\frac{1}{2} \epsilon \Sigma D\sigma \int \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dr}{ds} Ds + \frac{dr}{do} \partial o \right) \frac{dr}{d\tau} \right] \cdot$$

Die Entfernung r des Strom-Elements $D\sigma$ von den Elementen Ds , auf welche in diesem Ausdruck sich die Integration $\int$ bezieht ist eine Funktion von s und o ; sie kann aber auch als eine Funktion des Curven-Bogens angesehen werden, welchen die Enden des bewegten Leiterstücks beschreiben. In Fig. 2 sind dies die Bogen $b,bb_{\parallel}$ und $d,dd_{\parallel}$. Bezeichnen wir diese Curven, welche ich die Leit-Curven nenne, durch l , und ihre Elemente durch ∂l , so ist

$$\frac{dr}{dl} \partial l = \frac{dr}{ds} Ds + \frac{dr}{do} \partial o$$

Dies in den vorstehenden Ausdruck gesetzt verwandelt ihn in

$$\Sigma \int D\sigma \partial l \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{dl} \right]$$

und man erhält durch diese Betrachtung aus (15) für E den Ausdruck:

$$(17) \quad E = \frac{1}{2} \epsilon S \sum Ds D\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{o,}^{o''} - \frac{1}{2} \epsilon \sum \int D\sigma \partial l \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{dl} \right]_{s,}^{s''}$$

Derselbe wird identisch mit demjenigen in (11) wenn von den Elementen des bewegten Leiterstücks keines während der Bewegung aus der Schließung des inducirten Stroms heraustritt, und keines hinein, denn alsdann fallen die Leitcurven l mit den Bahnen o der Endelemente Ds des bewegten Stücks zusammen.

Bezeichnet man mit p wiederum die Peripherie des Curvenvierecks welches von dem bewegten Leiterstück in seiner End- und Anfangs-Position und den zwei Curven welche seine variablen End-Elemente beschrieben haben d.i. von seinen Leit-Curven, begrenzt wird, und durch Dp ein Element dieser Peripherie, so ergibt sich, wie oben der Ausdruck (12) aus (11), hier aus (17) der Ausdruck

$$(18) \quad E = \frac{1}{2} \epsilon \sum S \frac{D\sigma Dp}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{dp},$$

die Integrationen $\sum$ und S ausgedehnt auf den ganzen inducirenden Strom und das ganze Curvenviereck. Die positive Richtung von Dp wird durch die positive Richtung des bewegten Stücks in seiner Endposition bestimmt.

Aus (18) ergibt sich auf demselben Wege, auf welchem (13) aus (12) abgeleitet wurde

$$(19) \quad E = - \frac{1}{2} \epsilon S \sum \frac{D\sigma Dp}{r} \cos(D\sigma, Dp)$$

die Integrationen gleichfalls auf die ganze Stromcurve und das ganze Viereck ausgedehnt. Das Glied dieser Gleichung rechts ist das mit ϵ multiplicirte Potential der Stromcurve in Bezug auf das Curvenviereck welches von dem bewegten Leiterstück in seinen Grenzpositionen und seinen Leit-Curven gebildet wird. Dies Potential ist, da das bewegte Stück als unverzweigt vorausgesetzt wird, der Unterschied der Potentialwerthe des inducirenden Stroms in Bezug auf die ganze Bahn des inducirten Stroms in ihrer End- und Anfangs-Position. Bezeichnen wir diese wiederum durch s'' und s , so erhalten wir, wie in (14), auch hier

$$E = \varepsilon \{P(\varsigma, s_{,,}) - P(\varsigma, s_{,})\} \quad (20)$$

wo $P(\varsigma, s_{,})$ und $P(\varsigma, s_{,,})$ die Potentiale von ς in Bezug auf $s_{,}$ und $s_{,,}$ sind. Den Beweis für die Richtigkeit dieser Gleichung auch in den Fällen, wo ein wiederholter Ein- und Austritt eines Theiles der bewegten Elemente aus der Bahn des inducirten Stroms stattfindet, hier noch besonders zu führen scheint, da dieselben Betrachtungen nur ein wenig zu verallgemeinern sind, überflüssig.

Nach Behandlung dieses speciellen Falles, wo die Elemente eines zusammenhängenden Leiterstücks unter dem Einfluß eines inducirenden Stroms bewegt werden, während der übrige Theil der Bahn des inducirten Stroms ruht, wende ich mich zur allgemeinen Betrachtung des Werthes von E in (6). Aus (6) ist durch partielle Integration der Ausdruck für E in (11) abgeleitet; bei gehöriger Berücksichtigung der Grenzen, auf welche diese partiellen Integrationen zu beschränken sind, ist dieser Ausdruck für E in (11) ebenso allgemein als der in (6). Diese Grenzen werden auf eine doppelte Weise bestimmt, einmal durch die Stellen, wo die in (11) unter den Integralzeichen stehenden Gröfsen in Beziehung auf das Argument, nach welchem integrirt ist, sprungweise eine endliche Veränderung erleiden, und dann durch die Stellen, in welchen ein Element des Leiters in die Schließung des inducirten Stroms eintritt und austritt.

Betrachten wir zuerst das zweite Glied des Ausdrucks für E in (11). Dasselbe ergab sich aus dem, wegen einer hinzuzufügenden Willkührlichen unbestimmten, durch partielle Integration nach Ds entstandenen Integral $\Sigma \int \frac{D\sigma \partial o}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{do}$, indem dies auf das Intervall zwischen $s_{,}$ und $s_{,,}$ ausgedehnt wurde. Die nach Ds auszuführende Integration in (6) ist auf die ganze Bahn des inducirten Stroms auszudehnen, das Intervall von $s_{,}$ bis $s_{,,}$ muß aber auf die Theile derselben beschränkt werden, innerhalb deren die Gröfse $\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{do} D\sigma \partial o$ keine sprungweise Veränderung erleidet. Hieraus geht hervor, daß das Integral $\Sigma \int \frac{D\sigma \partial o}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{do}$ auf die ganze Bahn des inducirten Stroms auszudehnen ist, wenn $\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{do} D\sigma \partial o$ an keiner, oder nur an einer Stelle derselben einen Sprung erfährt, in welcher Stelle dann Anfang und Ende des Integrals liegen muß, daß aber, wenn die partielle Integration von (6) ein auf alle Fälle anwendbares Resultat geben soll, statt dieses In-

tegrals ein Aggregat solcher Integrale in dem Ausdrucke von E in (11) statt seines zweiten Gliedes zu setzen ist, von denen jedes sich auf ein Intervall von s bezieht, welches von zwei aufeinander folgenden Stellen, in welchen $\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds} D\sigma \partial o$ eine plötzliche Veränderung erleidet, begrenzt ist. Nun ist ersichtlich, daß $\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} D\sigma$ an keiner Stelle von s einen Sprung in seinem Werthe erfahren kann, da s die geschlossene Peripherie eines Vielecks ist, daß dies aber bei $\frac{dr}{ds} \partial o$, wofür man $\frac{dr}{ds} v \partial t$ setzen kann, der Fall ist. Diese Gröfse erfährt einen solchen Sprung an den Stellen von s , in welchen zwei aufeinanderfolgende Elemente Ds einen endlichen Unterschied in der Richtung oder Gröfse ihrer Geschwindigkeiten besitzen. Diese Stellen, in welchen die Elemente eines Drathstücks über den Elementen eines andern Drathstücks, der leitenden Verbindung wegen unter einen gewissen Druck, fortgleiten, oder in welchen die Drathenden in einer Quecksilberrinne fortgeführt werden, nenne ich, der Kürze wegen, die Gleitstellen des Leiters, und die Abschnitte desselben zwischen zwei aufeinander folgende Gleitstellen Leiterstücke.

In dem ersten Gliede des Ausdrucks von E in (11), welches durch partielle Integration nach ∂o aus (6) abgeleitet wurde, ist die Ausdehnung dieser Integration nicht durch Sprünge der Gröfse $\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds} Ds D\sigma$, da solche für keinen Werth von o stattfinden, beschränkt, sondern durch die Stellen des von Ds beschriebenen ganzen Weges, in welchen dies Element in die Bahn des inducirten Stroms eintritt und austritt. Dieser Eintritt und Austritt aus der inducirten Strombahn kann nur in den Gleitstellen stattfinden. Man muß also, die Elemente Ds , welche sich während ihrer ganzen Bewegung innerhalb der Schließung des inducirten Stroms befinden unterscheiden von den Elementen der Gleitstellen, bei welchen im Allgemeinen dies nur während eines Theils ihres beschriebenen Weges der Fall sein wird. Für die erstern bleibt, wenn, wie oben, durch o , und o'' , der Anfang und das Ende des von Ds beschriebenen Weges bezeichnet wird, das Glied

$\frac{1}{2} \epsilon S \sum Ds D\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds} \right]_{o,}^{o''}$ unverändert, in Bezug auf die Elemente Ds der Gleitstellen aber hat man statt dessen, wenn q, q'', q''', q'''' etc. die auf einander folgenden Stellen des von diesen Elementen beschriebenen Weges

bezeichnen, in welchen sie in die inducirte Strombahn ein- und austreten, zu setzen:

$$\frac{1}{2} \varepsilon S \sum Ds D\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{q'}^{q''} + \frac{1}{2} \varepsilon S \sum Ds D\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{q'''}^{q''''} + \dots$$

Aus diesen Bemerkungen ergibt sich nun, daß man auf dem Wege der partiellen Integration, auf welchem (11) aus (6) abgeleitet worden ist, zu einem allgemein gültigen Ausdruck von E gelangt, wenn man diese partiellen Integrationen in Beziehung auf die einzelnen Leiterstücke und in Beziehung auf die Theile der von ihren Elementen beschriebenen Wege, in welchen diese Elemente innerhalb der Schließung des inducirten Stroms sich befanden, ausführt, und dann die Summe dieser Integrale in Beziehung auf alle Leiterstücke, welche die inducirte Strombahn enthält, bildet. Es sei E_n der Theil von E, welcher sich auf das n^{te} Leiterstück bezieht, so ist

$$\begin{aligned} E_n = & \frac{1}{2} \varepsilon S \sum D\sigma Ds \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{o'}^{o''} \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon S \sum D\sigma Ds \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_{q'}^{q''} + \text{etc.} \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon S \int Ds \partial o \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right]_s^{s''} \end{aligned} \quad (21)$$

und

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_z \quad (22)$$

wenn z die Anzahl der Leiterstücke der Bahn des inducirten Stroms ist. Diese Gleichungen enthalten den allgemeinsten Ausdruck für die elektromotorische Kraft, welche von einem ruhenden Strom, dessen Stärke der Einheit gleich ist, in einem unverzweigten linearen Leiter, dessen Elemente beliebig verrückt werden, inducirt wird.

In Beziehung auf die Gleitstellen müssen die Fälle, in welchen die Unterlagen, auf welchen die Gleitung stattfindet, ruhen, unterschieden werden von den Fällen, wo diese Unterlagen selbst bewegt werden. Von den Leiterstücken, deren Enden auf ruhenden Unterlagen fortgleiten, befindet sich jedes unter solchen Umständen, die wir oben als specielle Fälle behandelt haben. Besteht also die inducirte Strombahn aus einer beliebigen An-

zahl von Leiterstücken, jedes derselben mit ruhenden Unterlagen, so folgt aus den vorstehenden Untersuchungen, daß die durch eine beliebige Veränderung der Lage und Form dieser Bahn inducirte elektromotorische Kraft, wenn diese Veränderung unter dem Einfluß eines konstanten, inducirenden Stroms stattgefunden hat, gleich ist dem mit ϵ multiplicirten Unterschied des Potentials des inducirenden Stroms in Bezug auf die von der Einheit durchströmte inducirte Strombahn in ihrer End- und Anfangs-Position.

Die Beurtheilung der Fälle, wo die Unterlagen in den Gleitstellen eine Bewegung haben, erfordert eine etwas weitläufige Darstellung, wenn sie aus (21) und (22) abgeleitet werden soll. Ich werde deshalb diese Fälle durch eine indirekte Betrachtung auf die erstern, in welchen die Unterlagen ruhen, zurückführen. Es wird genügen diese Betrachtung in dem speciellen Falle, wo nur eine Gleitstelle mit bewegter Unterlage vorhanden ist, durchzuführen, da sich dieselbe leicht auf die Fälle, wo eine beliebige Anzahl solcher vorhanden ist, ausdehnen läßt. Es sei in Fig. 3 die inducirte Strombahn $abcd$; sie zerfällt in drei Leiterstücke ab , bc , cda , von denen das letztere ein ruhendes ist; durch die gleichzeitige Fortführung der beiden andern ab und bc , welche ich der Kürze wegen mit α und β bezeichnen will, aus ihren anfänglichen Lagen α , und β , in ihre Endlagen α'' und β'' , wird die Induktion erregt. Die Gleitstellen dieser Bahn sind in a , b , c , von denen die in b eine Gleitstelle mit bewegter Unterlage ist. Nach (5) erhält man die inducirte elektromotorische Kraft, wenn man das Integral

$$(23) \quad S \Sigma \frac{Ds D\sigma}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{ds d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right\} \frac{dr}{do} v$$

mit $\epsilon \partial t$ multiplicirt, und nach ∂t integrirt. Ich werde den Werth, welchen das vorstehende Doppelintegral zur Zeit t , in Bezug auf α besitzt durch A , und in Bezug auf β durch B , bezeichnen; in Bezug auf das dritte Leiterstück ist, weil hier $v = 0$ ist, sein Werth gleich Null. Die Veränderungen, welche A , und B , erleiden, wenn t , um den Zeitraum t wächst, rühren von zwei von einander unabhängigen Ursachen her, einmal von den Ortsveränderungen, welche die Elemente von α erfahren, und dann von den Ortsveränderungen der Elemente von β . Bezeichnet man durch A und B die Werthe des vorstehenden Doppelintegrals zur Zeit t , $+t$ in Bezug auf α und β , so ist, wenn t sehr klein ist

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_\alpha t + A_\beta t \\ B &= B_1 + B_\alpha t + B_\beta t \end{aligned}$$

wo $A_\alpha t$ den Theil des Zuwachses von A_1 , welcher von der Ortsveränderung der Elemente von α herrührt, bezeichnet, und $A_\beta t$ den andern Theil, den die Verrückungen der Elemente von β hervorbringen. Die entsprechende Bedeutung besitzen B_α und B_β . Bildet man hieraus $\varepsilon \int_0^\tau \partial t A + \varepsilon \int_0^\tau \partial t B$, so erhält man die elektromotorische Kraft E , welche durch die gleichzeitige Verrückung von α und β , welche während des kleinen Zeitraums τ stattgefunden hat, inducirt worden ist d. i.

$$E = \varepsilon \tau \{A_1 + B_1 + \frac{1}{2} (A_\alpha + A_\beta + B_\alpha + B_\beta) \tau\}. \quad (24)$$

Es ist nun leicht nachzuweisen, daß eine gleiche elektromotorische Kraft inducirt wird, wenn dieselben kleinen Verschiebungen von α und β nicht gleichzeitig, sondern nach einander stattfinden. Es möge α auf dieselbe Weise wie vorher verschoben werden, während β ruht. Das Doppelintegral in (24) hat nur in Bezug auf α einen Werth, und dieser ist zur Zeit $t, + t : A_1 + A_\alpha t$; die durch die Verschiebung von α , wenn sie dieselbe Weite wie vorher erreicht hat, inducirte elektromotorische Kraft ist also

$$\varepsilon \tau \{A_1 + \frac{1}{2} A_\alpha \tau\}.$$

Jetzt werde β verschoben. Das Integral in (23) hat nun nur in Bezug auf β einen Werth, und dieser ist zur Zeit $t, + \tau$, wo seine Verschiebung beginnt: $B_1 + B_\alpha \tau$, und zur Zeit $t, + \tau + t : B_1 + B_\alpha \tau + B_\beta t$. Hieraus erhält man $\varepsilon \int_0^\tau B \partial t$ als die durch die Verschiebung von β inducirte elektromotorische Kraft, wenn diese Verschiebung so groß als sie vorher in der gleichzeitigen Verschiebung mit α war:

$$\varepsilon \tau \{B_1 + \frac{1}{2} (2B_\alpha + B_\beta) \tau\}.$$

Die Summe der durch die beiden auf einander folgenden Verschiebungen von α und β inducirten elektromotorischen Kräfte ist also

$$\varepsilon \tau \{A_1 + B_1 + \frac{1}{2} (A_\alpha + 2B_\alpha + B_\beta) \tau\}$$

Wäre die Reihenfolge der Verschiebungen umgekehrt gewesen, und zuerst

β und dann α um dieselben Stücke verschoben worden, so hätte als Summe der inducirten elektromotorischen Kräfte sich ergeben

$$\epsilon \tau \{A, + B, + \frac{1}{2} (A_\alpha + 2A_\beta + B_\beta) \tau\}.$$

Nun ist es aber gleichgültig, welche von den beiden Verschiebungen zuerst stattfindet, es wird dieselbe elektromotorische Kraft erregt, weil diese in dem einen und dem andern Falle gleich ist der mit ϵ multiplicirten Veränderung, welche das Potential des inducirenden Stroms in Bezug auf die inducirte von der Strom-Einheit durchströmte Strombahn durch beide Verschiebungen erfährt. Hieraus folgt:

$$A_\beta = B_\alpha.$$

Dies in (24) gesetzt, zeigt, daß dieselbe elektromotorische Kraft inducirt wird, die kleinen Verschiebungen der beiden Leiterstücke mögen gleichzeitig oder auf einander folgend stattfinden, und daß also dieselbe der Veränderung proportional ist, welche das Potential der inducirenden Strombahn in Bezug auf die inducirte dadurch erfährt. Da dies Resultat für alle kleine Verschiebungen gilt, zu welcher Zeit sie stattfinden, so gilt es auch für beliebig große Verschiebungen. Daß dies Resultat auch richtig ist, wenn die inducirte Strombahn eine beliebige Anzahl Gleitstellen mit bewegten Unterlagen besitzt, ergibt sich auf demselben Wege der Betrachtung, weshalb ich die weitere Ausführung unterlasse.

Aus der bisher geführten Untersuchung ergibt sich, daß die Gleichung für E in (20) allgemeine Gültigkeit hat, wie groß auch die Anzahl der Gleitstellen in der inducirten Strombahn ist, die Unterlagen derselben mögen ruhen oder bewegt werden, sie setzt nur noch voraus, daß sowohl die inducirende als die inducirte Strombahn ohne Verzweigung sei. Aus dieser Gleichung folgt, wenn j die Intensität des inducirenden Stroms ist, und $F = jE$ die durch ihn inducirte elektromotorische Kraft, wenn ferner sein Potential in Bezug auf die von der Strom-Einheit durchströmte inducirte Bahn durch $Q(\varsigma, s) = jP(\varsigma, s)$ bezeichnet wird, daß

$$(25) \quad F = \epsilon \{Q(\varsigma, s_{\parallel}) - Q(\varsigma, s_{\perp})\}.$$

Diese Gleichung enthält folgenden Satz:

Wenn ein geschlossener unverzweigter linearer Leiter unter dem Einfluß eines ruhenden, konstanten unverzweigten

elektrischen Stroms die Veränderung erlitten hat, daß ein Theil seiner Elemente oder sämtliche aus ihrer ursprünglichen Lage in eine zweite auf beliebigen Wegen fortgeführt sind, wobei es gleichgültig ist, ob ein Theil dieser Elemente aus dem geschlossenen Umgang des Leiters herausgetreten ist, oder andere eingetreten sind, so ist die durch diese Veränderung inducirte elektromotorische Kraft gleich dem mit ϵ multiplicirten Unterschied der Potentialwerthe des inducirenden Stroms in Bezug auf den geschlossenen Umgang des Leiters in seinem End- und Anfangs-Zustand, diesen Umgang von der Strom-Einheit durchströmt gedacht.

Die bisher gemachte Voraussetzung, daß der Leiter dem inducirten Strome nur einen Weg seines Umgangs biete, ist gleichgültig in Beziehung auf die Theile der Strombahn, welche keine Veränderung in Lage und Form erfahren; diese können auf eine beliebige Weise verzweigt sein, ohne daß der Ausdruck des vorstehenden Theorems dadurch eine Änderung erfährt. Anders verhält es sich, wenn die Theile der inducirten Strombahn verzweigt sind, durch deren Verrückungen die elektromotorische Kraft erregt wird. Zunächst ist zu bemerken, daß es in diesem Falle nicht hinreichend ist, um die Stärke der inducirten Ströme zu bestimmen, die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche in dem ganzen inducirten Leiter in einem bestimmten Zeitmoment erregt sind, zu kennen, sondern daß man diese Summe für jeden der geschlossenen Umgänge, welche die Zweige der Strombahn bilden, kennen muß. Nun erhält man aber die in jedem einzelnen Umgang inducirte elektromotorische Kraft, wenn man die Integrationen in (6) dieses §. auf ihn beschränkt, oder, was dasselbe ist, die Gleichungen in (21) und (22) auf diesen Umgang, als wäre er nur allein vorhanden, anwendet. Hieraus geht hervor, daß das vorstehende Theorem, dessen Ausdruck eine unverzweigte inducirte Strombahn voraussetzt, wenn diese verzweigt ist, für jeden ihrer geschlossenen Umgänge gilt.

Gehn wir jetzt zu dem Falle über, wo der inducirende konstante Strom auf eine beliebige Weise verzweigt ist. Ein solcher verzweigter Strom kann als ein Aggregat von über einander gelagerten einfachen Strom-Umgängen angesehen werden. Ich bezeichne diese einfachen Strom-Um-

gänge durch α, β , etc., ihre Strom-Stärken durch j_α, j_β , etc. Diese Strom-Stärken werden mittelst der Ohmschen Gesetze aus den Leitungswiderständen des Stromsystems und der elektromotorischen Kraft der Erreger bestimmt. Nennt man die Gröfse, welche oben in (1) und (2) mit C bezeichnet wurde, in Bezug auf die einfachen Umgänge α, β , etc., d. h. wenn die Integration Σ in (2) auf diese bezogen wird: C_α, C_β , etc. und behält für C die ursprüngliche Bedeutung, die nämlich, welche dieser Buchstabe in (1) hat, bei, so ist

$$C = C_\alpha + C_\beta + \dots$$

Substituirt man diesen Werth in (1) und verfährt auf dieselbe Weise, wie man (3) erhalten hat, so wird

$$(26) \quad J = \int \partial t \, \epsilon' \left(j_\alpha \frac{d}{dt} E_\alpha + j_\beta \frac{d}{dt} E_\beta + \dots \right)$$

wo E_α, E_β , etc. durch dasselbe Integral als E in (5) ausgedrückt sind, in welchem aber jetzt sich die Integration Σ respektive auf die Umgänge α, β , etc. bezieht. Es sind also einerseits $j_\alpha E_\alpha, j_\beta E_\beta$, etc. die durch die einzelnen Umgänge inducirten elektromotorischen Kräfte, wofür wir setzen respektive F_α, F_β , etc., anderseits ist ihre Summe, wie aus (26) erhellt, die von dem ganzen Strome inducirte elektromotorische Kraft, welche mit F bezeichnet wird, so daß

$$F = F_\alpha + F_\beta + \dots$$

Setzt man hierin für F_α, F_β , etc. ihre Werthe, so erhält man

$$(27) \quad F = \epsilon j_\alpha \{P(\alpha. s_{\alpha}) - P(\alpha. s_{\beta})\} \\ + \epsilon j_\beta \{P(\beta. s_{\alpha}) - P(\beta. s_{\beta})\} + \text{etc.}$$

worin $P(\alpha. s)$ das Potential der Strom-Einheit in dem Umgange α in Bezug auf die Strom-Einheit in dem Umgange s bezeichnet. Die mit dem gemeinschaftlichen Faktor ϵ multiplicirte Gröfse ist die Differenz des Potentials des ganzen inducirenden, beliebig verzweigten Stroms in Bezug auf die Strom-Einheit in dem inducirten Leiterumgang s in der End- und Anfangsposition seiner Elemente. Nennen wir den ganzen inducirenden Strom wie oben ς , und bezeichnen das Potential von ς in Bezug auf die Strom-Einheit in s durch $Q(\varsigma. s)$, so kann die Gleichung (27) so geschrieben werden:

$$(28) \quad F = \epsilon \{Q(\varsigma. s_{\alpha}) - Q(\varsigma. s_{\beta})\}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß das oben aus (25) abgeleitete Theorem eben so gut gilt, der inducirende Strom mag einfach sein, oder auf eine beliebige Weise verzweigt.

Mit Rücksicht auf die vorstehende Gleichung verwandelt sich (26) in

$$J = \varepsilon \int \partial t \varepsilon, \frac{d}{dt} Q(\varsigma, s) \quad (29)$$

wenn man bei der Bildung des Differentialquotienten $\frac{d}{dt} Q(\varsigma, s)$ allein s als Funktion der Zeit betrachtet, und j_a, j_β , etc. als konstant.

§. 2.

Es sollen in diesem §. die Ausdrücke für die elektromotorische Kraft entwickelt werden, welche in einem ruhenden linearen Leiter, der dem inducirten Strom einen geschlossenen Umgang darbietet, dadurch erregt wird, daß die Elemente eines inducirenden Stroms aus ihren ursprünglichen Lagen auf beliebigen Wegen in andere fortgeführt werden. Im Allgemeinen wirken in dieser Klasse von Induktionen zwei an sich von einander unabhängige Ursachen gleichzeitig Strom erregend, einmal die Ortsveränderung der Strom-Elemente, und dann die durch diese Ortsveränderung hervorgebrachte Intensitäts-Veränderung des Inducenten. Es soll hier, wenn eine solche Intensitäts-Veränderung gleichzeitig stattfindet, nur der Theil der elektromotorischen Kraft bestimmt werden, welcher von der Orts-Veränderung der Strom-Elemente herrührt; der durch die Intensitäts-Veränderung inducirte Antheil wird in §. 4 in Betracht gezogen werden. Wenn außer den Strom-Elementen auch der inducirte Leiter eine Bewegung hat, aber eine solche, wobei die relative Lage seiner Elemente unverändert bleibt, so kann beiden Systemen, dem Strom- und Leiter-System eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt werden, welche keine Induktion erregt und den Erfolg hat, daß der Leiter an seinem Orte bleibt, wodurch dieser Fall auf den in diesem §. zu behandelnden zurückgeführt wird.

Ich bezeichne wieder die Strom- und Leiter-Elemente respektive durch $D\sigma$ und Ds , das Element des Weges aber, auf welchen $D\sigma$ fortgeführt wird, durch $\partial\omega$, so daß die Geschwindigkeit $v = \frac{d\omega}{dt}$ ist. Ich setze zunächst die Bahn sowohl des inducirenden als inducirten Stroms ohne Ver-

zweigung voraus. Das aus dieser Voraussetzung hervorgehende Resultat wird später auf die Fälle ausgedehnt werden, wo diese Bahnen verzweigt sind.

Die durch die Bewegung von $D\sigma$ während des Zeitelements ∂t in dem Leiter s inducirte elektromotorische Kraft $ED\sigma$ ist nach meiner frühern Abhandlung bestimmt durch die Gleichung:

$$(1) \quad ED\sigma = -\epsilon v \Gamma D\sigma \partial t$$

wo $\Gamma D\sigma$ die nach der Richtung von $\partial\omega$ zerlegte Wirkung ist, welche die inducirte Strombahn, von der Strom-Einheit durchströmt gedacht, auf $D\sigma$ ausübt.

Die Wirkung, welche Ds auf $D\sigma$ ausübt, ist dieselbe, welche $D\sigma$ auf Ds ausübt, nur der Richtung nach entgegengesetzt, und also, wenn j die Stromstärke in $D\sigma$ bezeichnet:

$$j \frac{Ds D\sigma}{r^2} \left\{ \cos \eta - \frac{3}{2} \cos \mathfrak{S} \cos \mathfrak{S}' \right\}$$

oder

$$-j \frac{Ds D\sigma}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{ds d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right\}$$

wo η , $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ und r dieselbe Bedeutung haben, welche ihnen im Anfange des vorigen §. gegeben ist. Der vorstehende Ausdruck mit dem Cosinus der Neigung von r gegen $\partial\omega$ d. i. mit $-\frac{dr}{d\omega}$ multiplicirt, und nach Ds in Bezug auf die ganze inducirte Strombahn integrirt, giebt den Werth von $\Gamma D\sigma$, also

$$(2) \quad \Gamma D\sigma = j D\sigma S \frac{Ds}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{ds d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right\} \frac{dr}{d\omega}.$$

Nimmt man von (1) das Integral nach $D\sigma$, und dehnt dieses auf die ganze inducirende Strombahn aus, so erhält man die durch den Strom in dem Leiter zur Zeit t während ∂t inducirte elektromotorische Kraft. Dieses Integral giebt den inducirten Differentialstrom, wenn es mit dessen reciproken Leitungswiderstand ϵ' multiplicirt wird; der Differentialstrom, nach ∂t zwischen t , und t_0 integrirt, giebt den in diesem Zeitintervall inducirten Integralstrom J . Man hat also, da ϵ' unabhängig von t ist, und j , weil der Strom unverzweigt angenommen wird unabhängig von σ :

$$J = \epsilon' \int \partial t j \frac{dE}{dt} \quad (3)$$

worin

$$E = -\epsilon \int \Sigma S \partial t \frac{Ds D\sigma}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{ds d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right\} \frac{dr}{d\omega} v. \quad (4)$$

Die Gröfse E ist die Summe der in dem ganzen Leiterumgang während des Zeitraums von t , bis t'' , inducirten elektromotorischen Kraft, wenn die inducirende Stromstärke innerhalb dieses Zeitraums konstant und gleich der Einheit ist; diese Summe ist jE wenn j die konstante Stromstärke ist, und wird $\int_{t'}^{t''} \partial t j \frac{dE}{dt}$, wenn die Stromstärke j variabel ist. Die Gröfsen jE und $\int \partial t j \frac{dE}{dt}$ werde ich im Folgenden durch F bezeichnen. Statt (4) kann man schreiben, weil $v = \frac{d\omega}{dt}$ ist:

$$E = -\epsilon \int S \Sigma \frac{\partial \omega Ds D\sigma}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{ds d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right\} \frac{dr}{d\omega}. \quad (5)$$

Dies dreifache Integral, wodurch E bestimmt wird, unterscheidet sich von demjenigen in (6) des vorigen §. nur darin, dafs hier $\partial \omega$ eine Funktion von σ ist, während dort $\partial \omega$ eine Funktion von s war. Da aber zwischen dem bewegten σ hier und dem in §. 1 bewegten s kein weiterer Unterschied vorhanden ist, so kann man die Diskussion des Integrals (6) §. 1 unmittelbar auf das vorliegende anwenden, und erhält, mut. mut. dies Theorem:

Wenn ein konstanter, unverzweigter elektrischer Strom die Veränderung erlitten hat, dafs ein Theil seiner Elemente, oder sämtliche aus ihrer ursprünglichen Lage in eine zweite auf beliebigen Wegen fortgeführt sind, gleichgültig, ob ein Theil dieser Elemente aus der Strombahn ausgetreten ist, oder andere eingetreten, so ist die durch diese Ortsveränderung der Elemente in einem in der Nähe des Stroms ruhenden einfachen Leiter-Umgang inducirte elektromotorische Kraft gleich dem mit ϵ multiplicirten Unterschied der Potentialwerthe des inducirten Leiterumgangs, ihn von der Strom-Einheit durchströmt gedacht, in Bezug auf den konstanten inducirenden Strom in der End- und Anfangs-Position seiner Elemente.

Bezeichnen wir durch $s_{\text{„}}$ und $s_{\text{,}}$ die inducirende Strombahn in der End- und Anfangs-Position ihrer Elemente, durch s die inducirte, und durch $P(s_{\text{„}}, s)$ und $P(s_{\text{,}}, s)$ die Potentiale der Strom-Einheiten in $s_{\text{„}}$ und $s_{\text{,}}$ in Bezug auf die Strom-Einheit in s , nennen endlich j die konstante Intensität des inducirenden Stroms, und F die durch ihn inducirte elektromotorische Kraft, so ist

$$(6) \quad F = \epsilon j \{P(s_{\text{„}}, s) - P(s_{\text{,}}, s)\}.$$

Wenn der inducirte Leiter Verzweigungen besitzt, so gilt dieses Theorem für jeden einfachen Umgang, welcher aus seinen Zweigen gebildet werden kann, und giebt also die in den einzelnen Umgängen erregten elektromotorischen Kräfte, deren Kenntniss erforderlich und hinreichend ist um die Stromstärke in jedem Zweige des inducirten Leiters zu bestimmen.

Das vorstehende Theorem gilt auch für beliebig verzweigte inducirende Ströme, unter der Bedingung, daß die Stromstärke in jedem der geschlossenen Umgänge, welche aus den Stromzweigen gebildet werden können, durch die Verrückung der Strom-Elemente keine Veränderung erleidet. Der verzweigte Strom ist nemlich als ein Aggregat von einfachen Strom-Umgängen anzusehn; einer derselben werde durch ν bezeichnet, und zwar durch $\nu_{\text{,}}$ und $\nu_{\text{„}}$ in der Anfangs- und End-Position seiner Elemente; j_{ν} sei seine konstante Stromstärke, und F_{ν} die durch ihn in dem ruhenden Leiter-Umgang s inducirte elektromotorische Kraft. Bezeichnen wir wieder durch $P(\nu, s)$ das Potential der Strom-Einheit in ν in Bezug auf die Strom-Einheit in s , so ist

$$F_{\nu} = \epsilon j_{\nu} \{P(\nu_{\text{„}}, s) - P(\nu_{\text{,}}, s)\}.$$

Die elektromotorische Kraft, welche durch den ganzen inducirenden Strom erregt wird, ist die Summe der Kräfte, welche durch seine einzelnen componirenden Umgänge inducirt werden, bezeichnen wir sie mit F , so ist

$$(7) \quad F = \epsilon \sum j_{\nu} \{P(\nu_{\text{„}}, s) - P(\nu_{\text{,}}, s)\},$$

wo durch $\sum$ eine Summe bezeichnet wird, die auf alle einfache Umgänge, welche den gegebenen Strom zusammensetzen, auszudehnen ist. Diese Summe ist aber die Potential-Differenz der Strom-Einheit in dem Leiter-Umgang s in Bezug auf den ganzen inducirenden Strom in der End- und Anfangs-Position seiner Elemente. Nennen wir s den inducirenden, belie-

big verzweigten Strom und $Q(s, s)$ sein Potential in Bezug auf die Strom-Einheit in s , so kann die vorstehende Gleichung so geschrieben werden:

$$F = \varepsilon \{Q(s'', s) - Q(s', s)\}. \quad (8)$$

Die Bedingung der Unveränderlichkeit der Stromstärke in jedem der einfachen Umgänge der verzweigten inducirenden Strombahn erfüllt sich bei konstanten Strom-Erregern von selbst, wenn die Bahn keine Gleitstellen besitzt, weil dann der Strom-Widerstand und seine Vertheilung in den Zweigen unverändert bleibt. Diese Bedingung kann aber auch bei besondern Anordnungen, wenn Gleitstellen vorhanden sind, erreicht werden. In Fig. 4 tritt der inducirende Strom in a ein, theilt sich in a in zwei Zweige $a\beta$ und $a\gamma\beta$, die sich in β wieder vereinigen, und tritt bei b aus. Die Strom-Theilungsstellen a und β sind zugleich Gleitstellen. Die Fortführung des Zweiges $a\beta$ aus seiner Anfangs-Lage a, β , in die Endlage a'', β'' , erregt nemlich in einem in der Nähe befindlichen Leiter-Umgang die Induktion. Der verzweigte Strom läßt sich auf verschiedene Weise in zwei einfache Umgänge zerlegen, ich zerlege ihn in die Umgänge $aa\beta b$ und $a\gamma\beta$, welche ich durch α und γ der Kürze wegen bezeichne; die Stromstärken in ihnen seien j_α und j_γ . Nennt man u den Leitungswiderstand in dem Zweige $a\beta$ und ω in dem Zweige $a\gamma\beta$ und setzt $u = \lambda \omega$, so ist $j_\gamma = \frac{\lambda}{1+\lambda} j_\alpha$. Nun kann man leicht Anordnungen treffen, daß, an welcher Stelle seines Weges sich auch der bewegte Zweig $a\beta$ befinde, sowohl j_α als λ denselben Werth behält. Diese Anordnungen vorausgesetzt, erhält man für die durch die Verschiebung von $a\beta$ in einem Leiter-Umgange s inducirte elektromotorische Kraft F den Ausdruck:

$$F = \varepsilon j_\alpha \{P(a'', s) - P(a, s)\} + \varepsilon j_\gamma \{P(\gamma'', s) - P(\gamma, s)\}. \quad (9)$$

Dieser Ausdruck reduzirt sich übrigens, wie man leicht sieht, wenn durch π die Peripherie a, a'', β'', β , der vom bewegten Zweige beschriebenen Fläche bezeichnet wird, auf folgenden:

$$F = \varepsilon (j_\alpha - j_\gamma) P(\pi, s),$$

dessen Richtigkeit aus der Bemerkung erhellt, daß nach unserer Zerlegung des Inducen in einfache Umgänge $j_\alpha - j_\gamma$ die konstante Stromstärke des bewegten Zweiges $a\beta$ bezeichnet.

Im Allgemeinen treten bei inducirenden Strömen mit Gleitstellen, gleichzeitig mit der Verrückung ihrer Elemente, Intensitäts-Veränderungen ein, diese treten nur dann nicht ein, wenn die Veränderungen der Leitungswiderstände und ihrer Vertheilung, welche durch die Verschiebungen der Bahnstücke hervorgebracht werden, sich gegenseitig compensiren. Bahnstück nenne ich jeden zwischen zwei auf einander folgenden Gleitstellen liegenden Theil der Strombahn. Es sei der inducirende Strom unverzweigt und seine Intensität j , welche er zur Zeit t besitzt, verändere sich, in Folge der Fortführung seiner Bahnstücke, in dem Zeitintervall von t , bis $t_{\text{„}}$, aus j , in $j_{\text{„}}$. Wäre die Intensität j während der Zeit von t , bis t konstant gewesen, so würde in diesem Zeitraum eine elektromotorische Kraft inducirt sein, deren Werth ist

$$\epsilon j \{P(s, s) - P(s, s)\}.$$

Die Intensität j ist aber nur zur Zeit t vorhanden gewesen, da ihr Werth zur Zeit $t + \partial t$ schon $j + \frac{dj}{dt} \partial t$ war. Man kann aber j während ∂t als konstant ansehen, da der Zuwachs unendlich klein ist, und erhält dann für die während ∂t inducirte elektromotorische Kraft

$$\epsilon j \partial t \frac{d}{dt} P(s, s).$$

Nimmt man hiervon das Integral nach ∂t zwischen t , und $t_{\text{„}}$, so erhält man die durch die Verschiebung der Strom-Elemente in dem Zeitraum von t , bis $t_{\text{„}}$ inducirte elektromotorische Kraft F , nemlich:

$$(10) \quad F = \epsilon \int_t^{t_{\text{„}}} \partial t j \frac{d}{dt} P(s, s).$$

Diese Gleichung erhellet übrigens unmittelbar aus (3), wenn berücksichtigt wird, daß $\frac{dE}{dt} = \epsilon \frac{dP(s, s)}{dt}$ ist. Die hier eben angestellte Betrachtung findet, wenn der inducirende Strom verzweigt ist, auf jeden seiner einfachen Umgänge Anwendung. Daher verwandelt sich für den in Fig. 4 dargestellten Fall die Formel (9), wenn j_α und j_γ während der Verschiebung der Elemente von $\alpha\beta$ variabel sind, in

$$(11) \quad F = \epsilon \int \partial t j_\alpha \frac{d}{dt} P(\alpha, s) + \epsilon \int \partial t j_\gamma \frac{d}{dt} P(\gamma, s)$$

und der allgemeine Ausdruck in (7) für die durch die Verschiebung der Elemente eines beliebig verzweigten Stroms in einem Leiter-Umgang inducirte elektromotorische Kraft, wird bei variabler Stromstärke:

$$F = \epsilon \oint \partial t j_v \frac{d}{dt} P(v.s), \quad (12)$$

wo die Summe $\oint$ alle einfachen Umgänge, welche den gegebenen Strom zusammensetzen, umfaßt.

Die Gleichungen (10) (11) (12) zeigen, daß bei variabler Stromstärke die durch die Verschiebung der Strom-Elemente inducirte elektromotorische Kraft nicht ihr Maafs in dem dadurch hervorgebrachten Zuwachs des Potentialwerthes des inducirenden Stroms in Bezug auf den von der Strom-Einheit durchströmten Leiterumgang hat, wir werden aber im Folgenden sehen, daß dies wieder der Fall ist, wenn der durch die gleichzeitige Intensitäts-Veränderung inducirte Antheil der elektromotorischen Kraft berücksichtigt wird.

§. 3.

In meiner frühern Abhandlung über die inducirten Ströme wurden drei Klassen von Induktions-Fällen unterschieden, nemlich zuerst Induktionen durch geschlossene Ströme in geschlossenen Leitern, und dann Induktionen durch geschlossene Ströme in ungeschlossenen Leitern oder durch ungeschlossene Ströme in geschlossenen Leitern, und endlich Induktionen durch ungeschlossene Ströme in ungeschlossenen Leitern. Ich bemerke, daß bei dieser Eintheilung immer die Bahnen, sowohl der inducirenden als inducirten Ströme, oder deren bewegten Theile als feste Systeme vorausgesetzt wurden. Die Vorstellung, welche mit der zweiten und dritten Klasse verbunden wurde, bedarf noch einer kurzen Erklärung. Man denke sich einen Theil der inducirten Strombahn, den ich a nennen will, während der andere durch b bezeichnet werden möge, durch Isolatoren mit einem Theile α der inducirenden Strombahn verbunden, der andere Theil dieser Bahn soll β heißen. Die verbundenen Theile α und a werden bewegt, während die Theile b und β ruhen. Hier findet eine Induktion durch die Bewegung des ungeschlossenen Stromstücks a in dem ungeschlossenen Leiterstück b statt. Diese Induktion ist ein Fall der dritten Klasse. Eben so gehört die

Induktion, welche in dem ungeschlossenen Leiterstück a , das sich unter dem Einfluß des ungeschlossenen Stromstücks β bewegt, erregt wird in die dritte Klasse. Umfasse a die ganze inducirte Strombahn, und wäre also $b = 0$, so würde in dem geschlossenen Leiter a die Induktion durch das ungeschlossene Stromstück β erregt; dieser Fall gehörte in die zweite Klasse; dasselbe würde der Fall sein, wenn a den ganzen inducirenden Strom umfasse und $\beta = 0$ wäre.

Diese Eintheilung ist nach dem Standpunkt der vorliegenden Betrachtung nicht erschöpfend, sie ist aber auch an sich unzweckmässig. Die Trennung, um in der eben gebrauchten Bezeichnung weiter mich auszudrücken, der Induktion, welche in b durch a erregt wird von derjenigen, die in a durch β hervorgebracht wird, statt die Untersuchung zu erleichtern, erschwert dieselbe; beide Induktionen, wie sie gleichzeitig in der Wirklichkeit vorhanden sind, müssen auch gleichzeitig in Betracht gezogen werden. In der gegenwärtigen Abhandlung muß mit der Voraussetzung, daß die Strombahnen oder ihre bewegten Theile wie starre feste Curven bewegt werden, zugleich die Eintheilung in geschlossene und ungeschlossene Bahnen aufgegeben werden. Wir können hier nur so theilen: entweder findet die Induktion durch einen ruhenden Strom in einem geschlossenen Leiter statt, dessen Elemente eine Ortsveränderung erfahren, oder in einem ruhenden Leiter durch einen Strom, dessen Elemente beliebig verschoben werden, oder endlich die Induktion wird durch eine gleichzeitige Verschiebung der Leiter- und Strom-Elemente erregt. Die Bewegung der Elemente ist in allen drei Fällen so weit unbeschränkt, daß durch dieselbe die leitende Verbindung in den Strombahnen nicht aufgehoben wird. Die beiden ersten Fälle sind in den beiden vorhergehenden §§. behandelt, der dritte soll der Gegenstand des gegenwärtigen sein. Zu ihm gehört, als ein ganz specieller Fall, der, welcher eben als eine Induktion eines ungeschlossenen Leiterstücks durch ein ungeschlossenes Stromstück bezeichnet wurde. Das Specielle dieses Falles besteht darin, daß die Bewegung der Elemente in a und a von der Art ist, als gehörten diese Elemente einem festen Körper an.

Ich werde, um der Vorstellung ein bestimmteres Bild zu geben, die Untersuchung mit der Betrachtung eines besondern, hieher gehörigen Falls beginnen, und dann zeigen, wie sich diese verallgemeinern läßt. Der inducirende Strom sei unverzweigt, und bestehe aus zwei Bahnstücken, welche

in Fig. 5 durch α und β bezeichnet sind, α soll ruhen, die Elemente von β aber werden auf beliebigen Wegen aus der Position β , in die Position $\beta_{\text{„}}$ fortgeführt. Gleichzeitig mit dieser Fortführung geschieht in dem inducirten Leiter-Umgang, der gleichfalls aus zwei Leiterstücken, mit a und b in der Figur bezeichnet, besteht, die Verschiebung der Elemente von b , so dafs sie in derselben Zeit aus der Position in b , in die von $b_{\text{„}}$ gelangen. Es soll die durch diese gleichzeitigen im Übrigen von einander unabhängigen Verrückungen der Elemente in β und in b , in dem Leiterumgang $a+b$ inducirte elektromotorische Kraft bestimmt werden.

Ich bezeichne ein Element des ruhenden Bahnstücks α durch Da , des ruhenden Leiterstücks a durch Da , und die Elemente der beweglichen Stücke β und b durch $D\beta$ und Db . Den ganzen Strom-Umgang $a+\beta$ werde ich durch σ , und ein Element desselben, wenn nicht unterschieden werden soll ob es zu α oder β gehöre durch $D\sigma$ bezeichnen. Ebenso nenne ich den ganzen Leiter-Umgang $a+b$, und ein Element desselben ohne Unterschied ob es zu a oder b gehört, Ds . Der Strom in σ habe die konstante Intensität j . Die Wege, auf welchen Da und Da fortgeführt werden, seien $\partial\omega$ und ∂o , die Geschwindigkeiten dieser Elemente also $\frac{d\omega}{dt}$ und $\frac{do}{dt}$. Das Zeitintervall, während dessen die gleichzeitigen Verrückungen stattfinden liege zwischen t , und $t_{\text{„}}$.

Die während ∂t in dem Leiterumgang s inducirte elektromotorische Kraft ist, wenn C und Γ in dem Sinne genommen werden, welcher für diese Buchstaben im Anfange des § 1 und § 2 festgesetzt wurde

$$- \epsilon \partial t \sum C \frac{do}{dt} Ds - \epsilon \partial t \sum \Gamma \frac{d\omega}{dt} D\sigma.$$

Nimmt man hiervon das Integral nach ∂t zwischen t , und $t_{\text{„}}$ um die in diesem Zeitintervall inducirte elektromotorische Kraft zu erhalten, bezeichnet diese mit F , macht $F = jE$, und setzt für C und Γ ihre Werthe aus (2) § 1 und (2) § 2, so wird

$$E = - \epsilon \int \partial t \sum S \frac{Db D\sigma}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{db d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{dr}{db} \frac{dr}{d\sigma} \right\} \frac{dr}{do} \frac{do}{dt} \\ - \epsilon \int \partial t \sum S \frac{D\beta Ds}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{d\beta ds} - \frac{1}{2} \frac{dr}{d\beta} \frac{dr}{ds} \right\} \frac{dr}{d\omega} \frac{d\omega}{dt} \quad (1)$$

Von den beiden durch $\sum$ und S bezeichneten Integrationen, die im Allgemei-

nen auf die ganzen Umgänge respektive σ und s auszudehnen sind, beschränkt sich Σ in dem zweiten Gliede auf die Elemente von β , weil für die Elemente des Theils α der Faktor $\frac{d\omega}{dt} = 0$ ist, und S im ersten Gliede auf die Elemente von b , da für die Elemente von a hier $\frac{do}{dt} = 0$ ist; aus diesem Grunde ist in diesen Gliedern respektive statt $D\sigma$ und Ds geschrieben worden $D\beta$ und Db .

Ich werde das in dem ersten Gliede des vorstehenden Ausdrucks von E unter dem Integralzeichen $\int$ stehende Doppel-Integral durch B bezeichnen, und in dem zweiten Gliede durch B , so daß

$$(2) \quad \begin{aligned} B &= \Sigma S \frac{D\sigma Db}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{d\sigma db} - \frac{1}{2} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{db} \right\} \frac{dr}{do} \frac{do}{dt} \\ B &= \Sigma S \frac{D\beta Ds}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{d\beta ds} - \frac{1}{2} \frac{dr}{d\beta} \frac{dr}{ds} \right\} \frac{dr}{d\omega} \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}$$

und

$$(3) \quad E = -\varepsilon \int \partial t B - \varepsilon \int \partial t B$$

Die Integration in dem Ausdruck von B nach $D\sigma$ erstreckt sich auf alle Elemente welche zur Zeit t in dem Umgange σ enthalten sind, die nach Db ist von $b = b$, bis $b = b_{,,}$ auszudehnen, wo b , und $b_{,,}$ die zur Zeit t in den Gleitstellen liegenden Enden des bewegten Stücks b sind. Die Integration in B nach Ds ist auf alle zur Zeit t in s vorhandene Elemente auszudehnen, die nach $D\beta$ bezieht sich nur auf die zwischen β , und $\beta_{,,}$ liegenden Elemente, wo β , und $\beta_{,,}$ die Gleitstellen des bewegten Stücks β zur Zeit t bezeichnen. Es sind also sowohl die Anzahl der Elemente nach welchen in B und B zu integrieren ist, als die Lage derselben und deshalb auch r und dessen Differentialquotienten Funktionen der Zeit, und somit auch B und B . Diese Funktionen B und B sind in (3) nach ∂t zwischen t , und $t_{,,}$ zu integrieren.

Ich werde annehmen das Zeitintervall $t_{,,} - t = \tau$, sei sehr klein, so daß, wenn man $t, + \tau = t$ setzt, wo τ zwischen 0 und τ , liegen soll, man die Funktionen B und B nach den Potenzen von τ entwickeln kann, und nur die ersten Glieder dieser Entwicklung zu berücksichtigen braucht. Ich setze

$$\begin{aligned} B &= B, + B_{,,}\tau \\ B &= B, + B_{,,}\tau \end{aligned}$$

Hierin ist B , der Werth welchen B zur Zeit t , besitzt. Der Zuwachs welchen B zur Zeit $t, + \tau$ erfahren hat, rührt von zwei von einander unabhän-

gigen Ursachen her, einmal weil die Lage und Anzahl der Elemente des Leiterstücks b sich geändert hat, und dann weil dasselbe in Beziehung auf die Elemente der Strombahn σ stattgefunden hat. Ich werde um die Wirkung dieser beiden Ursachen zu unterscheiden, setzen

$$B_{\sigma} = B_b + B_{\sigma}$$

wo B_b den Theil von B_{σ} bezeichnen soll, welcher von der Veränderung der Zahl und Lage der Elemente in b herrührt, und B_{σ} von der Veränderung der Elemente in σ .

Ebenso besteht B_{σ} aus zwei von einander unabhängigen Theilen, der eine rührt von der Verschiebung der Elemente des Bahnstücks β her, und dieser soll mit B_{β} bezeichnet werden, der andere von der Veränderung welche der Leiterumgang s erlitten hat, und dieser soll B_s genant werden, so daß

$$B_{\sigma} = B_s + B_{\beta}$$

Setzt man diese Werthe in (3) und integrirt, nachdem man $\partial\tau$ statt ∂t geschrieben hat, nach $\partial\tau$ zwischen 0 und τ , so erhält man für die in dem kleinen Zeitintervall τ , inducirte elektromotorische Kraft E den Ausdruck

$$E = -\varepsilon\tau, \{B_s + B_{\beta} + \frac{1}{2}(B_b + B_{\sigma} + B_s + B_{\beta})\tau\} \quad (4)$$

Ich werde jetzt nachweisen, daß dieselbe elektromotorische Kraft inducirt wird, wenn man dieselben Verrückungen der Elemente der inducierenden und inducirten Strombahn nicht gleichzeitig sondern nach einander erfolgen läßt.

Es sollen die Elemente von β in Ruhe bleiben, und die von b verrückt werden; dann ist wegen $\frac{dw}{dt} = 0$ auch $B = 0$ und

$$B = B_b + B_{\sigma}\tau$$

Die jetzt inducirte elektromotorische Kraft, welche ich E_b nenne, hat den Ausdruck

$$E_b = -\varepsilon\tau, \{B_b + \frac{1}{2}B_{\sigma}\tau\}$$

worin, da die Verrückung der Elemente von b eben so groß sein soll wie vorher, τ , denselben Werth als in (4) besitzt. Jetzt, nachdem die Verschiebung von b vollendet ist, sollen die Elemente von β fortgeführt werden. Diese Fortführung geschieht in dem Zeitraum von $t + \tau$, bis $t + 2\tau$.

Zur Zeit $t + \tau$, hat B den Werth $B, + B, \tau$, und zur Zeit $t, + \tau, + \tau$ ist also

$$B = B, + B, \tau, + B_{\beta} \tau$$

während in dieser Periode $B = 0$ ist weil in ihr $\frac{do}{dt} = 0$. Nennt man die in dieser Periode inducirte elektromotorische Kraft $E,$, so ist

$$E, = -\varepsilon \tau, \{B, + \frac{1}{2} (2B, + B_{\beta}) \tau, \}$$

und demnach die Summe der in beiden Perioden inducirten elektromotorischen Kraft

$$(5) \quad E_b + E, = -\varepsilon \tau, \{B, + B, + \frac{1}{2} (B_b + 2B, + B_{\beta}) \tau, \}$$

Wäre die Ordnung in welcher die Elemente der Stücke b und β fortgeführt sind, die umgekehrte gewesen, und wäre also zuerst β und dann b verschoben worden, so hätte man, wenn die in der ersten Periode inducirte elektromotorische Kraft durch E_{β} , die der zweiten Periode durch E_{σ} bezeichnet wird, erhalten:

$$E_{\beta} = -\varepsilon \tau, \{B, + \frac{1}{2} B_{\beta} \tau, \}$$

$$E_{\sigma} = -\varepsilon \tau, \{B, + \frac{1}{2} (2B_{\sigma} + \frac{1}{2} B_b) \tau, \}$$

und also die Summe der in beiden Perioden inducirten elektromotorischen Kraft

$$E_{\beta} + E_{\sigma} = -\varepsilon \tau, \{B, + B, + \frac{1}{2} (B_{\beta} + 2B_{\sigma} + B_b) \tau, \}$$

Nun muß aber $E_{\beta} + E_{\sigma} = E_b + E,$ sein, weil jede dieser Größen dem Unterschied der Werthe gleich ist, welche das Potential von σ in Bezug auf s in den End- und Anfangs-Positionen der Elemente dieser zwei von der Strom-Einheit durchströmten Curven hat, und es in Beziehung auf diesen Unterschied gleichgültig ist, ob die Elemente von b zuerst und dann die von β , oder ob umgekehrt zuerst die Elemente von β und hierauf die von b fortgeführt worden sind. Hieraus folgt aber $B_{\sigma} = B,$ oder

$$2B, = B_{\sigma} + B,$$

Setzt man diesen Werth von $B,$ in (5) und vergleicht diese Gleichungen mit (4) so sieht man dafs

$$E = E_b + E,$$

und dafs es also bei kleinen Verschiebungen der Strom- und Leiter-Elemente

gleichgültig ist in Beziehung auf die inducirte elektromotorische Kraft, ob diese Verschiebungen gleichzeitig oder aufeinander folgend stattfinden. Bezeichnet man die Curven s und σ zur Zeit t , durch s , und s_{τ} , zur Zeit $t + \tau$, durch s_{τ} und s_{τ} und durch $P(s, s_{\tau})$ wieder das Potential von s in Bezug auf s_{τ} , beide Curven von der Strom-Einheit durchströmt gedacht, so kann man statt (4) schreiben

$$E = \epsilon \{P(s_{\tau}, s_{\tau}) - P(s, s)\}$$

Wenn die Verschiebung, und also auch τ , unendlich klein $= \partial t$ ist, so ist $P(s_{\tau}, s_{\tau}) - P(s, s)$ der mit ∂t multiplicirte nach t genommene Differentialquotient von $P(s, s)$. Mit Weglassung der Accente an s und s hat man also für die während ∂t inducirte elektromotorische Kraft den Ausdruck

$$\epsilon \partial t \frac{d}{dt} P(s, s)$$

Hierbei ist die Stromstärke des Inducen ten der Einheit gleich gesetzt, ist diese j so ist die inducirte Kraft

$$\epsilon \partial t j \frac{d}{dt} P(s, s) \quad (6)$$

woraus folgt, daß wenn j konstant ist, auch die in jedem endlichen Zeitintervall von t , bis t_{τ} , inducirte elektromotorische Kraft F ausgedrückt ist durch

$$F = \epsilon j \{P(s_{\tau}, s_{\tau}) - P(s, s)\} \quad (7)$$

wo s_{τ} , s_{τ} und s , s die Curven s und s in der Lage ihrer Elemente bezeichnen, die sie zur Zeit t , und t_{τ} , besitzen.

Durch die vorstehende Betrachtung ist die Summe der beiden dreifachen Integrale in (1) auf die Differenz zweier Doppel-Integrale zurückgeführt, nemlich, indem für $P(\sigma, s)$ sein Werth gesetzt wird

$$F = Ej = \frac{1}{2} \epsilon j \sum S \frac{D\sigma, Ds}{r} \cos(D\sigma, Ds) - \frac{1}{2} \epsilon j \sum S \frac{D\sigma_{\tau}, Ds_{\tau}}{r_{\tau}} \cos(D\sigma_{\tau}, Ds_{\tau}) \quad (8)$$

worin durch die den Elementen und dem r zugefügten Strichelchen die Lage und Entfernung derselben im Anfang und am Ende ihrer Verrückungen bezeichnet sind. Die Integrationen sind auf die ganzen geschlossenen Umgänge auszudehnen.

Wir haben bis jetzt einen speciellen Fall, wie er in Fig. 5. vorgestellt ist, vorausgesetzt, nemlich daß die inducirende Strombahn aus einem ruhenden und einem bewegten Bahnstücke bestehe, und ebenso der inducirte Leiter nur ein ruhendes und ein bewegtes Leiterstück besitze. Die vorstehende Betrachtung erleidet aber dadurch keine Veränderung, daß wir sowohl der inducirenden als inducirten Strombahn, wenn nur beide unverzweigt bleiben, eine beliebige Anzahl Bahn- und Leiterstücke ertheilen. Wir brauchen nur unter α alle ruhenden Stromelemente, wenn solche vorhanden sind, verstehen, und unter β alle bewegten, und ebenso unter a alle ruhenden Elemente der inducirten Bahn und unter b alle bewegten. Die Gleichungen (7) und (8) gelten also allgemein für alle unverzweigten Strom- und Leiterumgänge. Ist die inducirte Strombahn verzweigt, so gelten sie für jeden geschlossenen Umgang, der aus ihren Zweigen gebildet werden kann. Ist der inducirende Strom verzweigt, und bleibt die Stromstärke in jedem Zweige ungeachtet der Verrückung der Strom-Elemente, ungeändert, so gelten die Gleichungen (7) und (8) für jeden der einfachen Strom-Umgänge, aus welchen der Inducenzt zusammengesetzt gedacht werden kann. Es sei v einer dieser Umgänge, die in ihm fließende Stromstärke sei j_v und der Antheil der inducirten elektromotorischen Kraft, welcher ihm zukömmt werde durch F_v bezeichnet, so ist nach (7)

$$(7) \quad F_v = \varepsilon j_v \{P(v'', s'') - P(v, s)\}$$

und die ganze inducirte elektromotorische Kraft also

$$(9) \quad F = \varepsilon \mathfrak{S} j_v \{P(v'', s'') - P(v, s)\}$$

wo $\mathfrak{S}$ dieselbe Bedeutung wie in (7) des vorigen § hat, wofür man, wenn $Q(s, s)$ das Potential des inducirenden, beliebig verzweigten Stroms s in Bezug auf die Strom-Einheit in s bezeichnet man schreiben kann

$$(10) \quad F = \varepsilon \{Q(s'', s'') - Q(s, s)\}$$

Durch diese Gleichung ist das neue, im Eingang dieser Abhandlung aufgestellte Induktions-Princip so weit bewiesen, als in dem Inducenzen keine Veränderungen in der Stromstärke vor sich gehn.

Ist die Stromstärke j variabel, und der Inducenzt unverzweigt, so erhält man aus (6) für die in dem Zeitintervall von t , bis t'' , inducirte elektromotorische Kraft den Ausdruck

$$F = \varepsilon \int \partial t j \frac{d}{dt} P(\sigma \cdot s) \quad (11)$$

Ist der Inducent verzweigt, und seine Stromstärke veränderlich, so erhält man hieraus statt der Gleichung (9) die folgende

$$F = \varepsilon \mathfrak{C} \cdot \int \partial t j_v \frac{d}{dt} P(v \cdot s) \quad (12)$$

§. 4.

Es bleibt noch übrig diejenige elektromotorische Kraft auszudrücken, welche, ohne daß eine Orts-Veränderung der Elemente eines inducirenden Stroms eintritt, durch die Veränderung seiner Stromstärke erregt wird, oder, wenn eine solche Ortsveränderung vorhanden ist, den Antheil der inducirten elektromotorischen Kraft zu bestimmen, welcher von der gleichzeitig eingetretenen Intensitäts-Veränderung herrührt. Dies ist der Gegenstand dieses §.

Der Ausdruck für die in Rede stehende elektromotorische Kraft kann nicht aus den Principien, welche den vorigen §§ zum Grunde liegen, abgeleitet werden, da diese sich nur auf die Orts-Veränderungen der Strom- und Leiter-Elemente beziehen. In meiner frühern Abhandlung aber wurde ich durch Analogie auf ein anderes Princip geführt, durch welches die vorliegende Frage beantwortet werden kann, und das sich durch die Beobachtung als richtig bewährt hat. Dieses Princip habe ich an dem angeführten Orte so ausgesprochen: wenn in einem ruhenden geschlossenen Strom σ die Intensität j , sich in $j_{\text{„}}$ verändert, so ist die in einem in seiner Nähe befindlichen einfachen Leiter-Umgang s dadurch inducirte elektromotorische Kraft

$$\varepsilon (j_{\text{„}} - j) P(\sigma \cdot s) \quad (1)$$

d. i. proportional mit der Potential-Differenz des Inducenten σ in seinen zweierlei Intensitäts-Zuständen j , und $j_{\text{„}}$ in Bezug auf die Strom-Einheit in dem Leiter-Umgang s .

Der Grundsatz auf welchem dies Princip beruht ist der, daß die Induktion in einem ruhenden geschlossenen Leiter allein durch die Veränderung der Wirkung des Inducenten nach Außen hervorgebracht wird, und daß die in einer bestimmten Zeit inducirte elektromotorische Kraft allein von dem Anfangs- und Endzustand dieser Wirkung abhängt, nicht von der Art und

Weise, wie der letztere aus dem erstern hervorgegangen ist. Ist z. B. der Endzustand dieser Wirkung gleich dem Anfangszustand, so ist die Summe der inducirten elektromotorischen Kraft immer gleich Null. Wenn dieselbe Veränderung in der Wirkung eines Stromes nach Aufsen, welche durch eine Veränderung seiner Intensität eingetreten ist, durch eine Verschiebung seiner Elemente hervorgebracht werden kann, so hat man in dem Ausdruck der durch diese Verschiebung inducirten elektromotorischen Kraft zugleich den für die durch die Intensitäts-Veränderung erregte. Die Veränderung der Stromstärke von j in j'' eines ruhenden Inducen ten bringt dieselbe Variation in seiner Wirkung nach Aufsen hervor, als wäre zu dem ursprünglichen Strom j ein anderer von derselben Configuration mit der Intensität $j'' - j$ aus unendlicher Ferne hinzugeführt und über ihn gelegt worden. Die durch den hinzugeführten Strom inducirte elektromotorische Kraft ist $F = \epsilon(j'' - j) P(\sigma \cdot s)$, und dies ist der in (1) gegebene Ausdruck für die durch die Intensitäts-Veränderung $j'' - j$ inducirte elektromotorische Kraft. — Ich werde diesen Grundsatz noch durch ein zweites Beispiel erläutern, und dazu den in § 2 behandelten Induktionsfall, auf welchen sich Fig. 4. bezieht, wählen. Ich behalte die a. O. gebrauchte Bezeichnung bei, und füge der dort gemachten Bestimmung daß j_a und λ konstant sein sollen noch die hinzu, daß λ verschwindend klein sei. Alsdann fließt der ganze inducirende Strom in dem Umgang $aa\beta b$, da jetzt die Intensität j_γ in dem Zweige $\alpha\gamma\beta$ unendlich klein ist. Führt man nun das bewegliche Bahnstück $\alpha\beta$ aus seiner Anfangs-Lage α, β , in der Richtung nach α'', β'' so weit, bis es bei γ ganz aus der leitenden Verbindung mit der Strombahn austritt, so ist die inducirte elektromotorische Kraft $\epsilon j_a P(\pi \cdot s)$, wo π die Curve $\alpha, \alpha'', \gamma \beta'', \beta$, bezeichnet, auf welcher die Enden des bewegten Bahnstücks fortgleiteten. Die Veränderung die in dem inducirenden Strom hervorgebracht ist, ist aber keine andere als die, welche durch das Eintreten des Stroms j_a in die mit π bezeichnete Curve, in welcher im Anfange kein Strom floß, hervorgebracht wird. Das Eintreten eines Stromes von der Intensität j_a in die Bahn π inducirt also in dem Leiterumgang s eine elektromotorische Kraft, deren Ausdruck $\epsilon j_a P(\pi \cdot s)$ oder wenn für $P(\pi \cdot s)$ sein Werth gesetzt wird, und statt j_a der Buchstabe j gebraucht wird

$$(2) \quad -\frac{1}{2} \epsilon j S \sum \frac{D_s D_\pi}{r} \cos(D_s \cdot D_\pi)$$

wo die Integrationen auf die geschlossene Curven π und s auszudehnen sind. Da dieser Ausdruck gilt, welche Formen auch π und s haben, so schließt man hieraus daß jedes Strom-Element $D\pi$ in jedem Leiter-Element Ds , so fern diese Elemente geschlossenen Umgängen angehören, dadurch daß die Stromintensität des Umganges zu welchem $D\pi$ gehört, von o bis j wächst, eine elektromotorische Kraft inducirt, welche den Ausdruck:

$$-\frac{1}{2} \epsilon j \frac{Ds D\pi}{r} \cos (Ds \cdot D\pi) \quad (3)$$

hat. Statt des Ausdrucks in (2) kann man, zufolge der Nachweisung welche in § 1 bei Ableitung der Gleichung (13) aus (12) gegeben ist, schreiben

$$\frac{1}{2} \epsilon j S \Sigma \frac{Ds D\pi}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\pi}, \quad (4)$$

und also auch als elementare Wirkung der Induktion durch Intensitätsveränderung setzen

$$\frac{1}{2} \epsilon j \frac{Ds D\pi}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\pi}. \quad (5)$$

Die Absicht der Ausdrücke in (3) und (5) für die elementare Induktion durch Intensitäts-Veränderung ist durch sie den Antheil zu bestimmen, welchen ein gegebener Theil der Strombahn π an der durch die ganze Bahn inducirten elektromotorischen Kraft hat, oder den Theil derselben, welcher in einem gegebenen Stück des geschlossenen Leiterumganges erregt ist. Man erhält diese Theile der elektromotorischen Kraft, wenn man die Integrationen in (2) und (4) auf die in Rede stehenden Stücke der Curven π und s beschränkt.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß, wenn in einem Strom-Element $D\sigma$ die Stromstärke j während ∂t einen Zuwachs $\frac{dj}{dt} \partial t$ erhält, dadurch in dem Element Ds eines geschlossenen Leiterumganges s eine elektromotorische Kraft erregt wird, welche den Werth

$$-\frac{1}{2} \epsilon \partial t \frac{Ds D\sigma}{r} \cos (Ds \cdot D\sigma) \cdot \frac{dj}{dt} \quad (6)$$

hat, und daß die durch den ganzen Strom-Umgang in dem ganzen Leiterumgang während ∂t inducirte elektromotorische Kraft

$$\epsilon \partial t P(\sigma \cdot s) \frac{dj}{dt} \quad (7)$$

ist; die Summe derselben welche in dem Zeitraum von t , bis $t_{\text{„}}$ erregt ist, erhält man durch Integration dieses Ausdrucks nach ∂t zwischen t , und $t_{\text{„}}$, und ist also

$$(8) \quad \epsilon \int_{t,}^{t_{\text{„}}} \partial t P(\sigma . s) \frac{dj}{dt}$$

Hierin kann $P(\sigma . s)$ eine Funktion der Zeit sein, entweder weil die Lage der Elemente von s oder die Lage der Elemente von σ von dieser Gröfse abhängen oder weil beide Curven zugleich mit der Zeit sich verändern.

Die vorstehenden Ausdrücke in (7) und (8) gelten wenn der Leiter verzweigt ist für jeden einfachen Umgang desselben, und wenn der inducirende Strom verzweigt ist, für jeden seiner einfachen Umgänge, aus welchen er zusammengesetzt gedacht werden kann.

Ich werde jetzt nachweisen dafs wenn eine Intensitäts-Veränderung in Folge der Verrückung der Strom-Elemente eintritt, die ganze inducirte elektromotorische Kraft, von der ein Theil durch die Verrückung der Elemente der andere durch die Variation ihrer Strom-Intensität erregt ist, gleich ist dem mit ϵ multiplicirten Unterschied der Werthe welche das Potential des inducirenden Stroms in dem End- und Anfangszustand seiner Elemente in Bezug auf den von der Strom-Einheit durchströmten Leiter-Umgang hat. Ich werde dies zuerst in einigen einfachen speciellen Fällen thun, von welchen aus sich das Resultat leicht verallgemeinern lassen wird.

Es sei der inducirende Strom ohne Verzweigung, und er bestehe aus einem ruhenden Bahnstück α und einem bewegten β . Die Fortführung dieses Stücks geschehe in dem Zeitraum von t , bis $t_{\text{„}}$, und wirke inducirend auf einen ruhenden Leiter-Umgang s . Das Verhältnifs der Leitungswiderstände in α und β sei so, dafs die Stromstärke j durch die Fortführung des Bahnstücks β sich von j , in $j_{\text{„}}$ verändert. Die von α und β gebildete geschlossene Bahn nenne ich ς und bezeichne sie durch ς , und $\varsigma_{\text{„}}$ in der Anfangs- und Endposition von β .

Der Antheil der elektromotorischen Kraft, welcher durch die Fortführung der Elemente von β inducirt wird, hat nach (10) § 2 den Ausdruck

$$(9) \quad \epsilon \int \partial t j \frac{d}{dt} P(\varsigma . s)$$

und der durch die Veränderung der Stromstärke inducirte Antheil ist nach (8) dieses §:

$$\varepsilon \int \partial t P(\sigma \cdot s) \frac{d.j}{dt} \quad (10)$$

wo die Integrationen in beiden Ausdrücken auf das Intervall von t , bis t_0 , auszudehnen sind. Die Summe F dieser beiden Antheile, d. i. die ganze inducirte elektromotorische Kraft ist also

$$F = \varepsilon \int \partial t \frac{d.j}{dt} j P(\sigma \cdot s)$$

d. i.

$$F = \varepsilon \{j_0 P(s_0 \cdot s) - j P(s, s)\} \quad (11)$$

Dies ist für den speciellen vorliegenden Fall der Satz, welcher bewiesen werden sollte. Mann sieht aber sogleich dafs man zu demselben Resultat gelangt, wenn man den Strom aus einer beliebigen Anzahl Bahnstücken bestehend voraussetzt, dafs man ihren Gleitstellen ruhende oder bewegte Unterlagen geben kann, dafs man endlich die Elemente des Leiterumgangs gleichzeitig mit den Strom-Elementen beliebig verschieben kann, ohne dafs der Ausdruck für F in (11) dadurch eine Veränderung erleidet, wenn nur Strom- und Leiterumgang unverzweigt ist. Denn da in allen diesen Fällen der durch die Verschiebung der Elemente erregte Theil der elektromotorischen Kraft durch (9), der durch die Intensitäts-Veränderung erregte Antheil durch (10) ausgedrückt ist, und F die Summe dieser beiden Theile ist, so gilt die Gleichung (11) überhaupt für einfache Strom- und Leiterumgänge, mufs nun aber, in dieser Verallgemeinerung, so geschrieben werden:

$$F = \varepsilon \{j_0 P(s_0 \cdot s_0) - j P(s, s)\}. \quad (12)$$

Es ergibt sich ferner, dafs, wenn der inducirte Leiter verzweigt ist, da in diesem Falle (9) und (10) die eben bezeichneten Theile der elektromotorischen Kraft, welche in jedem einzelnen Umgang der aus seinen Zweigen gebildet werden kann, erregt wird, ausdrücken, die Gleichung (11) für jeden solchen Umgang gilt, und durch sie die in ihm inducirte elektromotorische Kraft bestimmt wird.

Behufs der Beurtheilung der Induction durch beliebig verzweigte Inducen-
ten, werde ich zuerst wieder ein einfaches hieher gehöriges Beispiel behandeln. Fig. 6 stelle den inducirenden Strom dar, er besteht aus den

drei Zweigen α , β , γ , von denen, während α und γ ruhen, β aus der Lage β , in die Lage $\beta_{,,}$ fortgeführt wird, wodurch in einem in der Nähe befindlichen Leiterumgang s die elektromotorische Kraft F inducirt wird. Diesen verzweigten Strom sehe ich als aus zwei einfachen Strömen zusammengesetzt an, von denen der eine seine Bahn in dem aus α und β gebildeten Umgang hat, der andere in dem aus α und γ gebildeten. Die Stromstärke in dem erstern Umgang werde ich durch j_β in dem andern durch j_γ bezeichnen. Die Anfangs- und Endwerthe dieser Gröſsen sollen $j_{\beta,}$, j_γ , und $j_{\beta,,}$, $j_{\gamma,,}$ sein. Ebenso sollen α , β , γ in ihren Anfangs- und Endzuständen bezeichnet werden. Das Integral $-\frac{1}{2}S\sum \frac{D_s D\sigma}{r} \cos(D\sigma \cdot Ds)$, ausgedehnt in Bezug auf Ds auf den ganzen Leiterumgang s und beschränkt in Bezug auf $D\sigma$ respektive auf die Bahnstücke α , β , γ will ich durch $P(\alpha \cdot s)$, $P(\beta \cdot s)$, $P(\gamma \cdot s)$ bezeichnen. Das Potential des ganzen inducirenden Stroms, den ich durch ς bezeichne, in Bezug auf die Strom-Einheit in s soll $Q(\varsigma \cdot s)$ sein, so daß

$$(13) \quad Q(\varsigma \cdot s) = j_\beta \{P\alpha \cdot s + P\beta \cdot s\} + j_\gamma \{P(\alpha \cdot s) + P(\gamma \cdot s)\}.$$

Die durch die Verschiebung der Strom-Elemente in s inducirte elektromotorische Kraft F ist die Summe derjenigen, welche von jedem der einfachen Umgänge, in welche der Inducient zerlegt ist, erregt wird. Also hat man mit Rücksicht auf das in (11) in Beziehung auf einfache Umgänge erhaltene Resultat:

$$(14) \quad F = \varepsilon \{j_{\beta,,} (P(\alpha_{,,} \cdot s) + P(\beta_{,,} \cdot s)) - j_{\beta,} (P(\alpha \cdot s) + P(\beta \cdot s))\} \\ + \varepsilon \{j_{\gamma,,} (P(\alpha_{,,} \cdot s) + P(\beta_{,,} \cdot s)) - j_{\gamma,} (P(\alpha \cdot s) + P(\gamma \cdot s))\}$$

worin in dem vorliegenden Falle wo der aus α und γ gebildete Umgang unverändert bleibt

$$P(\alpha_{,,} \cdot s) + P(\gamma_{,,} \cdot s) = P(\alpha \cdot s) + P(\beta \cdot s).$$

Statt (14) kann man mit Rücksicht auf (13) schreiben

$$(15) \quad F = \varepsilon \{Q(\varsigma_{,,} \cdot s) - Q(\varsigma \cdot s)\}$$

wodurch der Satz, welcher nachgewiesen werden sollte, erreicht ist.

Jede andere Zerlegung des gegebenen Stromes z. B. in die zwei Umgänge, welche durch $\alpha\beta$ und $\gamma\beta$ gebildet werden, führt zu demselben Resultat. Ich werde, obwohl gar keine Schwierigkeit dabei ist, die Betrachtung für diese Zerlegung noch durchführen. Ich werde die Stromstärke in dem

Umgang $\alpha\beta$ jetzt durch j_α und in dem Umgang $\beta\gamma$ durch j_γ bezeichnen. Die Gröfse j_γ ist dieselbe wie vorher; dies ergibt sich daraus, daß in jedem Zweige, also auch in γ dieselbe Stromstärke vorhanden sein muß, auf welche Art die Zerlegung auch vorgenommen wird; aus demselben Grunde ist auch j_α , die jetzige Stromstärke in α gleich $j_\beta + j_\gamma$, welches nach der ersten Art der Zerlegung die Stromstärke in diesem Zweige war. Die Summe der von den beiden einfachen Strömen j_α und j_γ inducirten elektromotorischen Kraft ist

$$F = \varepsilon \{ j_{\alpha''} (P(\alpha'', s) + P(\beta'', s)) - j_{\alpha'} (P(\alpha', s) + P(\beta', s)) \} \\ + \varepsilon \{ j_{\gamma''} (P(\gamma'', s) - P(\beta'', s)) - j_{\gamma'} (P(\gamma', s) - P(\beta', s)) \}. \quad (16)$$

Es ist in dem Gliede, welches sich auf den Strom j_γ bezieht, dem $P(\beta, s)$ das negative Vorzeichen gegeben, weil die Richtung, nach welcher das durch diese Gröfse bezeichnete Integral zu nehmen ist, entgegengesetzt ist derjenigen, nach welcher dasselbe Integral in dem Gliede genommen ist, welches sich auf den Strom j_α bezieht.

Der vorstehende Ausdruck reducirt sich, wie man sogleich sieht, auf

$$F = \varepsilon \{ Q(s'', s) - Q(s', s) \}$$

er verwandelt sich übrigens in den Ausdruck (14), wenn man die Relationen $j_{\alpha''} = j_{\beta''} + j_{\gamma''}$, $j_{\alpha'} = j_{\beta'} + j_{\gamma'}$ berücksichtigt.

Man übersieht leicht, daß wenn wir bei dem in Fig. 6. dargestellten Induktionsfall bleiben, aber während der Fortführung des Bahnstücks β , dem aus α, γ gebildeten Umgange eine beliebige Formveränderung erfahren lassen, an der Gleichung für F (15) dadurch nichts verändert wird, daß aber, wenn der inducirte Leiterumgang nicht ruht, vielmehr seine Elemente eine beliebige Verschiebung erfahren, die Gleichung (15) sich verwandelt in

$$F = \varepsilon \{ Q(s'', s'') - Q(s', s') \}. \quad (16)$$

Nach dieser Diskussion eines Beispiels eines verzweigten Inducenten variabler Intensität, wird es leicht sein die Betrachtung allgewein anzustellen. Es sei ein beliebig verzweigter Strom gegeben, dessen Elemente beliebig verschoben werden, diese Verschiebung und die dadurch hervorgebrachte Intensitäts-Veränderung inducirt in einem in der Nähe befindlichen einfachen Leiterumgang, dessen Elemente gleichfalls eine beliebige gleichzeitige Verschiebung erfahren, einen Strom, es soll die Summe der inducirten elektro-

motorischen Kraft bestimmt werden. Es werde der inducirende Strom in die einfachen Ströme zerlegt, aus deren Uebereinander-Lagerung er entstanden gedacht werden kann, ihre Umgänge seien $\alpha, \beta, \dots \nu \dots$, und ihre Stromstärken $j_\alpha, j_\beta \dots j_\nu \dots$. Die Anfangs- und Endzustände sollen wieder durch beigefügte Strichelchen bezeichnet werden. Den ganzen inducirenden Strom nenne ich ς und in seinem Anfangszustand und Endzustand: $\varsigma,$ und $\varsigma_{,,}$. Die entsprechende Bedeutung haben $s, s_{,,}$ für den inducirten Leiterumgang. Das Potential von ς in Bezug s , diesen Umgang von der Strom-Einheit durchströmt gedacht, ist $Q(\varsigma.s)$, so daß

$$(17) \quad Q(\varsigma.s) = j_\alpha P(\alpha.s) + j_\beta P(\beta.s) + \dots = \mathfrak{S} j_\nu P(\nu.s)$$

wo das Summenzeichen $\mathfrak{S}$ auf alle einfachen Umgänge, in welche der Inducen-
cent zerlegt ist, sich bezieht.

Die von dem Umgange ν inducirte elektromotorische Kraft ist nach (12)

$$\varepsilon \{j_{\nu,,} P(\nu_{,,}.s_{,,}) - j_\nu P(\nu.s_{,,})\}$$

Die von dem ganzen Inducen-ten erregte Kraft F ist die Summe der von seinen einfachen Umgängen inducirten elektromotorischen Kräfte, also

$$(18) \quad F = \varepsilon \mathfrak{S} \{j_{\nu,,} P(\nu_{,,}.s_{,,}) - j_\nu P(\nu.s_{,,})\}$$

oder nach (17)

$$(19) \quad F = \varepsilon \{Q(\varsigma_{,,}.s_{,,}) - Q(\varsigma.s_{,,})\}.$$

Durch diese Gleichung ist der Satz, welcher im Eingange dieser Abhandlung als ein neues Princip der mathematischen Theorie der Induktion aufgestellt ist, in seiner ganzen Allgemeinheit bewiesen.

Ich will hier nur noch einem Bedenken begegnen, welches bei der Herleitung, die ich eben für diese Gleichung gegeben habe, entstehen könnte. Dies Bedenken bezieht sich auf den Fall, wo die Anzahl der einfachen Strom-Umgänge, in welche der Inducen-
cent zu zerlegen ist, vor und nach der Verrückung seiner Elemente verschieden ist. Die Diskussion eines einzelnen solchen Falls wird hinreichen zu zeigen, daß dieser Umstand, wenn er eintritt, ohne Einfluß auf die Gleichung (19) ist. Unter Anzahl von Umgängen, in welche der Strom zu zerlegen ist, ist die kleinste, durch welche dies geschehen kann, verstanden; dies ist eine durch die Verzweigung des Stromsystems vollkommen bestimmte, und gleich der Anzahl von Wegen, welche das

Stromsystem gestattet, um von einem Punkte desselben aus zu ihm zurückzukehren, ohne einen Theil des Weges doppelt zu gehn. Anschaulicher wird die kleinste Anzahl von Strom-Umgängen, in welche ein verzweigter Strom zerlegt werden kann, wenn man sich die Strombahn mit ihren Verzweigungen in eine Ebene, oder eine andere Fläche so gelegt denken kann, daß die Zweige sich in keinen andern Punkten als in den Stromtheilungsstellen schneiden. Dadurch wird in dieser Fläche ein Stück begrenzt, das Stromgebiet, innerhalb dessen alle Stromzweige liegen, und dasselbe in Stromfelder theilen. Die Anzahl dieser Stromfelder ist dann das Minimum der Anzahl von einfachen Umgängen in welche das Stromsystem zerlegt werden kann. Jeder dieser Strom-Umgänge kann wieder auf verschiedene Weise zerlegt werden z. B. kann jeder als ein Aggregat von Strömen in derselben Bahn angesehen werden. Nach dieser allgemeinen Bemerkung wende ich mich zu dem speciellen Fall.

Es sei Fig. 7. der inducirende Strom dargestellt, er besteht aus dem Stamm $\alpha\beta\gamma$ und den Zweigen $\beta\delta\epsilon\gamma$ und $\beta\mu\gamma$. Die Induktion wird durch die Fortführung des Bahnstücks $\beta\gamma$ in die Lage β,γ erregt. Vor der Fortführung des Bahnstücks besteht das Stromgebiet aus drei Feldern, nach der Fortführung aus vier, vor der Fortführung muß der Strom also wenigstens in drei, nach derselben in vier einfache Umgänge getheilt werden. Es hindert aber Nichts den Inducen ten auch schon vor der Fortführung des Stücks $\beta\gamma$ in vier Stromumgänge zu zerlegen, und diese so zu wählen, daß sie denjenigen nach der Fortführung entsprechen. Ich zerlege nach der Fortführung in die Umgänge $\alpha\beta,\gamma,\alpha$, $\alpha\delta\epsilon\gamma,\alpha$, $\alpha\delta\epsilon\alpha$ und $\alpha\mu\alpha$, nenne diese respektive β , κ , δ und μ , und die Stromstärken in ihnen j_β , j_κ , etc. Vor der Verrückung fallen die beiden Umgänge β und κ zusammen, und bilden den einen Umgang $\alpha\beta\gamma$, den ich α nennen will, in welchem also ein Strom von der Intensität $j_\beta + j_\kappa = j_\alpha$ fließt. Die Anwendung der Formel (18) auf den vorliegenden Fall giebt

$$F = \varepsilon \{ j_\beta P(\beta, s) + j_\kappa P(\kappa, s) + j_\delta P(\delta, s) + j_\mu P(\mu, s) \} \\ - \varepsilon \{ j_\beta P(\beta, s) + j_\kappa P(\kappa, s) + j_\delta P(\delta, s) + j_\mu P(\mu, s) \}$$

worin man, da $P(\beta, s) = P(\kappa, s) = P(\alpha, s)$ und $j_\beta + j_\kappa = j_\alpha$ ist, statt $j_\beta P(\beta, s) + j_\kappa P(\kappa, s)$ setzen kann $j_\alpha P(\alpha, s)$. Hieraus ergibt sich, daß für die Anwendung die vermittelnde Betrachtung, nach welcher j_α vor der

Verrückung des Bahnstücks in j_β und j_* zerlegt wurde, unnöthig ist, welches auch schon daraus erhellt, daß der vorstehende Ausdruck für F von dem in (19) nicht verschieden ist.

§. 5.

W. Weber hat in seiner Abhandlung: elektrodynamische Maafsbestimmungen u. s. w. den Weg gebahnt, welcher über die Kluft in unserer Kenntniß der elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkung der Elektricität führen wird. Er zeigt wie die Ampere'schen Gesetze für die Wirkung zweier Strom-Elemente aus der Wirkung der positiven und negativen Elektricität des einen Elements auf die beiden Elektricitäten des andern abgeleitet werden können. Diese Analyse der Ampere'schen Gesetze führte zu dem Grundgesetz für die Wirkung zweier elektrischen Massen, nach welchen diese nicht allein von ihrer relativen Entfernung, sondern auch relativen Geschwindigkeit und deren Veränderung abhängig ist. Dieses Grundgesetz erklärt zugleich, wie Weber gezeigt hat, die Induktions-Erscheinungen und giebt ihre Gesetze. Der Gegenstand dieses § ist nachzuweisen, wie weit die im Vorhergehenden erhaltenen Resultate mit den aus Weber's Grundgesetz der elektrischen Wirkung abgeleiteten Induktionsgesetzen übereinstimmen.

Bezeichnet man mit η , und e , zwei elektrische Massen, jede in einem Punkt concentrirt gedacht durch r ihre Entfernung zur Zeit t , so hat die Wirkung von η , auf e , nach Weber's Grundgesetz die Richtung von r und ihre Gröfse ist ausgedrückt durch

$$(1) \quad \frac{f\eta e}{r^2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{16} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right) \right\}$$

worin f und a zwei Konstanten sind, $\frac{dr}{dt}$ die relative Geschwindigkeit der Massen η , und e , und $\frac{d^2r}{dt^2}$ das Inkrement dieser Geschwindigkeit. Diese Wirkung ist abstossend wenn η , und e , gleiche Vorzeichen besitzen, und anziehend bei entgegengesetzten Vorzeichen.

Um hieraus die Wirkung, welche zwei Strom-Elemente auf einander ausüben, abzuleiten, denkt man sich jedes von gleicher Menge positiver und negativer Elektricität in entgegengesetzter Richtung durchströmt, und sum-

mirt die vier Wirkungen, welche die zwei Elektricitäten des einen Elements auf die zwei des andern ausüben. Ich nenne $D\sigma$ und Ds die Strom-Elemente und bezeichne durch $\pm \eta D\sigma$ und $\pm e Ds$ ihre Elektricitätsmengen, wo $\pm \eta$ und $\pm e$ die Produkte aus den Dichtigkeiten in die Querschnitte der Strom-Bahn sind. Die Geschwindigkeiten mit welchen $+\eta D\sigma$ und $-\eta D\sigma$ in der Strombahn σ sich bewegen sind $+\frac{d\sigma}{dt}$ und $-\frac{d\sigma}{dt}$, und ebenso sind die Geschwindigkeiten mit welcher $\pm e Ds$ sich in der Strombahn s bewegen $\pm \frac{ds}{dt}$. Die Stromstärken sind mit den durch jeden Querschnitt der Strombahn durchströmenden Elektricitätsmengen proportional, so daß wenn i und j die Stromstärken in $D\sigma$ und Ds bezeichnen, und z und u die Stromgeschwindigkeiten bis auf einen konstanten Faktor, den man $= 1$ setzen kann,

$$i = \eta \frac{d\sigma}{dt} = \eta z \quad j = e \frac{ds}{dt} = eu \quad (2)$$

ist.

Die Entfernung der Strom-Elemente $D\sigma$ und Ds werde ich durch $(\eta \cdot e)$ bezeichnen, wenn sie sich auf die in ihnen fließenden $+\eta$ und $+e$ beziehn soll, durch $(-\eta \cdot e)$ wenn sie sich auf $-\eta$ und $+e$ beziehn soll u. s. w. Diese Unterscheidungen von r in $(\pm \eta \cdot \pm e)$ ist erforderlich, weil diese Grössen, obwohl alle vier gleich r sind, doch ungleiche Differentialquotienten in Bezug auf die Zeit besitzen. Sie soll auch nur für die Bezeichnung dieser Differentialquotienten angewandt werden.

Die Wirkung der beiden Strom-Elemente $D\sigma$ und Ds ist die Summe von folgenden vier Ausdrücken

$$\begin{aligned} 1. & \quad f_{\eta e} \frac{D\sigma Ds}{r^2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{16} \left(\left(\frac{d(e \cdot \eta)}{dt} \right)^2 - 2r \frac{d^2(e \cdot \eta)}{dt^2} \right) \right\} \\ 2. & \quad -f_{\eta e} \frac{D\sigma Ds}{r^2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{16} \left(\left(\frac{d(e \cdot -\eta)}{dt} \right)^2 - 2r \frac{d^2(e \cdot -\eta)}{dt^2} \right) \right\} \\ 3. & \quad -f_{\eta e} \frac{D\sigma Ds}{r^2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{16} \left(\left(\frac{d(-e \cdot \eta)}{dt} \right)^2 - 2r \frac{d^2(-e \cdot \eta)}{dt^2} \right) \right\} \\ 4. & \quad f_{\eta e} \frac{D\sigma Ds}{r^2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{16} \left(\left(\frac{d(-e \cdot -\eta)}{dt} \right)^2 - 2r \frac{d^2(-e \cdot -\eta)}{dt^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Die Summe der beiden ersten Ausdrücke giebt die Wirkung des Elements $D\sigma$ d. i. seiner beiden Elektricitäten auf die positive Elektricität des Elements Ds , die Summe der beiden andern Ausdrücke die Wirkung von $D\sigma$

auf die negative Elektricität in Ds . Mit der Differenz dieser beiden Summen ist die Kraft proportional, welche die beiden Elektricitäten in dem Element Ds in der Richtung von r zu trennen strebt. Multiplicirt man diese Differenz mit dem Cosinus des Winkels, unter welchem r gegen das Element Ds geneigt ist, so erhält man den Theil dieser Kraft, welcher die Trennung der beiden Elektricitäten in Ds in der Richtung von Ds zu bewirken strebt d. i. die elektromotorische Kraft, welche das Element $D\sigma$ auf das Element Ds ausübt.

Die Summe der beiden ersten Ausdrücke in (3) ist, wenn der Kürze wegen statt $a^2 f$ gesetzt wird g :

$$- g \eta e \frac{D\sigma Ds}{16 \cdot r^2} \left\{ \left(\frac{d(e \cdot \eta)}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d(e \cdot -\eta)}{dt} \right)^2 - 2r \left(\frac{d^2(e \cdot \eta)}{dt^2} - \frac{d^2(e \cdot -\eta)}{dt^2} \right) \right\}$$

und die der beiden letzten:

$$- g \eta e \frac{D\sigma Ds}{16 \cdot r^2} \left\{ \left(\frac{d(-e \cdot -\eta)}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d(-e \cdot \eta)}{dt} \right)^2 - 2r \left(\frac{d^2(-e \cdot -\eta)}{dt^2} - \frac{d^2(-e \cdot \eta)}{dt^2} \right) \right\}$$

Die Summe beider vorstehenden Ausdrücke giebt die elektrodynamische Wirkung von $D\sigma$ auf Ds , und führt in ihrer weitem Entwicklung zu den Ampereschen Gesetzen. Die Differenz derselben mit einer Konstanten h multiplicirt und mit dem Cosinus der Neigung von r gegen Ds d. i. mit $\frac{dr}{ds}$, giebt die elektromotorische Kraft, welche $D\sigma$ auf Ds ausübt. Ich bezeichne diese mit $E_\eta D\sigma Ds$, und setze $gh = a^2$, so wird:

$$(4) \quad E_\eta = \frac{-a^2 e \eta}{16 r^2} \left\{ \left(\frac{d(e \cdot \eta)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(-e \cdot \eta)}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d(e \cdot -\eta)}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d(-e \cdot -\eta)}{dt} \right)^2 \right\} \frac{dr}{ds} - 2r \left\{ \frac{d^2(e \cdot \eta)}{dt^2} + \frac{d^2(-e \cdot \eta)}{dt^2} - \frac{d^2(e \cdot -\eta)}{dt^2} - \frac{d^2(-e \cdot -\eta)}{dt^2} \right\} \frac{dr}{ds}.$$

Um diese Formel sogleich auf den allgemeinsten Induktionsfall anzuwenden, nenne ich ω und o die Wege auf welchen die Elemente der Strombahnen $D\sigma$ und Ds fortgeführt werden, $\partial\omega$ und ∂o bezeichnen die Elemente dieser Wege, so wie $\frac{d\omega}{dt}$ und $\frac{do}{dt}$ die Fortführungs-Geschwindigkeiten.

Die Entfernung r der Electricitäten in den beiden Bahn-Elementen $D\sigma$ und Ds ist eine Funktion der vier von einander unabhängigen Größen σ , s , ω , o , die ihrerseits Funktionen der Zeit t sind, so daß

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} + \frac{dr}{d\omega} \frac{d\omega}{dt} + \frac{dr}{do} \frac{do}{dt}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt} = & \frac{d\sigma}{dt} \left\{ \frac{d^2 r}{d\sigma^2} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d^2 r}{ds d\sigma} \frac{ds}{dt} + \frac{d^2 r}{d\omega d\sigma} \frac{d\omega}{dt} + \frac{d^2 r}{do d\sigma} \frac{do}{dt} \right\} \\ & + \frac{ds}{dt} \left\{ \frac{d^2 r}{d\sigma ds} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{ds}{dt} + \frac{d^2 r}{d\omega ds} \frac{d\omega}{dt} + \frac{d^2 r}{do ds} \frac{do}{dt} \right\} \\ & + \frac{d\omega}{dt} \left\{ \frac{d^2 r}{d\sigma d\omega} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d^2 r}{ds d\omega} \frac{ds}{dt} + \frac{d^2 r}{d\omega^2} \frac{d\omega}{dt} + \frac{d^2 r}{do d\omega} \frac{do}{dt} \right\} \\ & + \frac{do}{dt} \left\{ \frac{d^2 r}{d\sigma do} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d^2 r}{ds do} \frac{ds}{dt} + \frac{d^2 r}{d\omega do} \frac{d\omega}{dt} + \frac{d^2 r}{do^2} \frac{do}{dt} \right\} \\ & + \frac{dr}{d\sigma} \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + \frac{dr}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{dr}{d\omega} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{dr}{do} \frac{d^2 o}{dt^2} \end{aligned}$$

Man erhält hieraus die ersten und zweiten Differentialquotienten von $(e.\eta)$ wenn man beide Stromgeschwindigkeiten $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{d\sigma}{dt}$ und ihre Differentialquotienten $\frac{d^2 s}{dt^2}$ und $\frac{d^2 \sigma}{dt^2}$ positiv nimmt, diejenigen von $(-e.\eta)$ wenn dem $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{d^2 s}{dt^2}$ das negative Vorzeichen gegeben wird, während $\frac{d\sigma}{dt}$ und $\frac{d^2 \sigma}{dt^2}$ positiv bleibt. Allgemein erhält man diese beiden Differentialquotienten von $(\pm e.\pm\eta)$ wenn man in vorstehenden Ausdrücken von $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{d^2 r}{dt^2}$ statt $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d^2 s}{dt^2}$, $\frac{d\sigma}{dt}$, $\frac{d^2 \sigma}{dt^2}$ respektive setzt $\pm \frac{ds}{dt}$, $\pm \frac{d^2 s}{dt^2}$, $\pm \frac{d\sigma}{dt}$ und $\pm \frac{d^2 \sigma}{dt^2}$. Dies giebt

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d(e.\eta)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(-e.\eta)}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d(e.-\eta)}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d(-e.-\eta)}{dt} \right)^2 \\ & = 8 \left\{ \frac{dr}{do} \frac{do}{dt} + \frac{dr}{d\omega} \frac{d\omega}{dt} \right\} \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \\ \text{und} \\ & \frac{d^2(e.\eta)}{dt^2} + \frac{d^2(-e.\eta)}{dt^2} - \frac{d^2(e.-\eta)}{dt^2} - \frac{d^2(-e.-\eta)}{dt^2} \\ & = 8 \left\{ \frac{d^2 r}{do d\sigma} \frac{do}{dt} + \frac{d^2 r}{d\omega d\sigma} \frac{d\omega}{dt} \right\} \frac{d\sigma}{dt} + 4 \frac{dr}{d\sigma} \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \end{aligned}$$

Diese Werthe in (4) substituirt geben:

$$\begin{aligned} E_\eta = & \frac{a^2 e \eta}{r^2} \frac{d\sigma}{dt} \left\{ \left(r \frac{d^2 r}{d\sigma d\omega} - \frac{1}{2} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{d\omega} \right) \frac{dr}{ds} \frac{d\omega}{dt} \right. \\ & \left. + \left(r \frac{d^2 r}{d\sigma do} - \frac{1}{2} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{do} \right) \frac{dr}{ds} \frac{do}{dt} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \frac{a^2 e \eta}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \end{aligned} \quad (5)$$

oder, wenn nach (2) $\eta \frac{d\sigma}{dt} = i$ gesetzt wird und

$$(6) \quad \eta \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = \frac{di}{dt}$$

und zugleich statt $a^2 e$ der Buchstabe ε eingeführt wird,

$$(7a) \quad E_\eta = \varepsilon i \left\{ \left(r \frac{d^2 r}{d\tau d\omega} - \frac{1}{2} \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{d\omega} \right) \frac{d\omega}{dt} \right\} \frac{dr}{ds} \\ + \left(r \frac{d^2 r}{d\tau do} - \frac{1}{2} \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{do} \right) \frac{do}{dt} \frac{dr}{ds} \\ + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{r} \frac{di}{dt} \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{ds}.$$

Man ersieht aus diesem Ausdruck für E_η , daß die elektromotorische Kraft, welche das Strom-Element $i D\sigma$ auf Ds ausübt, unabhängig ist von der Stromgeschwindigkeit in Ds oder von der Stromstärke dieses Elements, deshalb denken wir uns diese $= 0$ und nennen Ds das Leiter-Element, im Gegensatz von $D\sigma$, welches das Strom-Element genannt wird.

Die von dem Stromstück σ in dem Leiterstück s in dem Zeitraum von t , bis t_1 , inducirte elektromotorische Kraft, welche ich mit F bezeichne, erhält man durch die Integration von $E_\eta D\sigma Ds \partial t$ nach $D\sigma, Ds$ und ∂t zwischen den Grenzen der Stücke σ, s und des Zeitintervalls $t_1 - t$. Es ist also:

$$(7b) \quad F = \sum S \int E_\eta D\sigma Ds \partial t.$$

Der einfachste Fall ist ersichtlich der, wo weder die Strom- noch die Leiter-Elemente eine Orts-Veränderung erleiden, also $\frac{d\omega}{dt} = 0$ und $\frac{do}{dt} = 0$ ist, die Induktion demnach allein durch eine Intensitäts-Veränderung des Stroms in σ hervorgebracht wird. In diesem Falle wird

$$(8) \quad F = \frac{1}{2} \varepsilon \sum S \int \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{ds} \frac{di}{dt} D\sigma Ds \partial t$$

Es sei σ ein einfach geschlossener Strom-Umgang, so daß i innerhalb desselben konstant, allein von t abhängt; die nach ∂t ausgeführte Integration giebt dann, wenn i , und i_1 , die Stromstärken von σ zur Zeit t , und t_1 , bezeichnen

$$(9) \quad F = \frac{1}{2} \varepsilon (i_1 - i) \sum S \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{ds} D\sigma Ds,$$

wofür man nach der Auseinandersetzung, welche in § 1 bei Ableitung der Gleichung (13) aus (12) gemacht ist, setzen kann

$$F = -\frac{1}{2} \varepsilon (i_{\text{„}} - i) \sum S \frac{1}{r} \cos(D\sigma \cdot Ds) D\sigma Ds. \quad (10)$$

Ist der Inducent ein verzweigter Strom, so zerlegen wir ihn in einfache Umgänge; einer dieser Umgänge sei ν , der in ihm fließende Strom habe die Stärke i_{ν} , und zur Zeit t , und $t_{\text{„}}$ sei diese i_{ν} , und $i_{\nu\text{„}}$. Die durch ν in s inducirte elektromotorische Kraft ist:

$$F_{\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon (i_{\nu\text{„}} - i_{\nu}) \sum S \frac{1}{r} \cos(D\nu \cdot Ds) D\nu Ds$$

und die durch den ganzen Inducenten inducirte:

$$F = -\frac{1}{2} \varepsilon \mathfrak{S}. (i_{\nu\text{„}} - i_{\nu}) \sum S \frac{1}{r} \cos(D\nu \cdot Ds) D\nu Ds \quad (11)$$

wo die durch $\mathfrak{S}$. bezeichnete Summe über alle einfachen Umgänge, welche den Inducenten zusammensetzen, auszudehnen ist.

Da s , sofern ein inducirter Strom zu Stande kommen soll, ein geschlossener Umgang ist, irgend einer derjenigen, welche, wenn der inducirte Leiter verzweigt ist, aus seinen Zweigen gebildet werden können, so kann man statt (10) schreiben

$$F = \varepsilon (i_{\text{„}} - i) P(\varsigma \cdot s) \quad (12)$$

und statt (11)

$$F = \varepsilon \mathfrak{S}. (i_{\nu\text{„}} - i_{\nu}) P(\nu \cdot s) = \varepsilon \{Q(\varsigma_{\text{„}} \cdot s) - Q(\varsigma \cdot s)\} \quad (13)$$

wo $P(\varsigma \cdot s)$ das Potential von ς in Bezug auf s bezeichnet, beide Umgänge von der Strom-Einheit durchströmt gedacht, und $Q(\varsigma \cdot s)$ und $Q(\varsigma_{\text{„}} \cdot s)$ das Potential des Inducenten im Anfangs- und Endzustand in Bezug auf den von der Strom-Einheit durchströmten Leiterumgang s .

Betrachten wir jetzt den Fall, wo die Induktion allein durch Ortsveränderung der Leiter-Elemente Ds erregt wird, die unter dem Einfluß eines ruhenden und konstanten Stroms stattfindet. Da in diesem Falle $\frac{di}{dt} = 0$ und $\frac{d\omega}{dt} = 0$, so erhält man aus (7a) und (7b), wenn statt der Integration nach ∂t die nach ∂o eingeführt wird:

$$F = \varepsilon i \sum S \int \partial o \frac{Ds D\sigma}{r^2} \left\{ r \frac{d^2 r}{d\sigma do} - \frac{1}{2} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{do} \right\} \frac{dr}{ds}. \quad (14)$$

Durch das entsprechende Verfahren, mittelst dessen in § 1 aus der Gleichung (6) die Gleichung (10) abgeleitet wurde, erhält man hieraus, wenn

die Grenzen der Integration nach ∂o , Ds und $D\sigma$ respektive mit o , o'' , s , s'' und σ , σ'' bezeichnet werden

$$\begin{aligned}
 (15) \quad F = & \frac{1}{2} \epsilon i S \int \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{do} \frac{dr}{ds} \right]_{o,}^{o''} Ds \partial o \\
 & + \frac{1}{2} \epsilon i S \int \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right]_{o,}^{o''} Ds D\sigma \\
 & - \frac{1}{2} \epsilon i S \int \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{do} \right]_{s,}^{s''} D\sigma \partial o
 \end{aligned}$$

wo die Klammern [] dieselbe Bedeutung haben als in (7) § 1.

Da der ruhende Inducent keine Gleitstellen besitzt, so ist die Integration nach $D\sigma$ über den ganzen Strom-Umgang auszudehnen, sei es, daß dieser für sich den Inducenten bildet, oder, daß er einer der ihn zusammensetzenden Strom-Umgänge ist. Es fällt also hier immer σ , mit σ'' zusammen, und daher

$$\begin{aligned}
 (16) \quad F = & \frac{1}{2} \epsilon i S \int \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right]_{o,}^{o''} D\sigma Ds \\
 & - \frac{1}{2} \epsilon i S \int \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{do} \right]_{s,}^{s''} D\sigma \partial o.
 \end{aligned}$$

Erinnert man sich, daß die inducirte elektromotorische Kraft F unter der Voraussetzung, daß $i=1$ ist, durch E in § 1 bezeichnet wurde, so sieht man, daß die vorstehende Gleichung mit der in (11) § 1 völlig übereinstimmt, und sie also auch identisch mit der in (27) daselbst ist d. i. mit

$$(17) \quad F = \epsilon \{Q(\varsigma \cdot s'') - Q(\varsigma \cdot s)\}.$$

Gehen wir jetzt zur Betrachtung eines dritten Falls, in welchem der inducirte Leiter ruht, und die Induktion durch die Verschiebung der Elemente eines konstanten Stroms erregt wird. Da hier $\frac{do}{dt} = 0$ und $\frac{di}{dt} = 0$, so erhält man aus (7a) und (7b), wenn, wie ich zunächst annehme, der Inducent unverzweigt ist,

$$F = \varepsilon i \sum S \int \partial \omega Ds D\sigma \left\{ r \frac{d^2 r}{d\sigma d\omega} - \frac{1}{2} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{d\omega} \right\} \frac{dr}{ds}. \quad (18)$$

Dies dreifache Integral läßt sich wie das entsprechende in (14) auf ein Aggregat von Doppel-Integralen zurückführen, welches man aus (15) erhält, wenn darin statt o, o', o'' gesetzt wird $\omega, \omega', \omega''$; aus diesem Aggregat ver-

schwindet das Glied $-\frac{1}{2} \varepsilon i \sum \int \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{d\omega} \right] D\sigma \partial \omega$, weil die Integration nach s

Ds in (18) auf den geschlossenen Umgang s auszudehnen ist, da in ihm als einem ruhenden Umgang keine Gleitstellen vorhanden sind. Demnach ergibt sich aus (18)

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon i \sum S \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right]_{\omega'}^{\omega''} D\sigma Ds + \frac{1}{2} \varepsilon i \sum S \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} \right]_{\sigma'}^{\sigma''} Ds \partial \omega. \quad (19)$$

Dieser Ausdruck verwandelt sich, wenn in σ keine Gleitstellen vorhanden sind, weil dann σ , mit σ'' zusammenfällt, in

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon i \sum S \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right]_{\omega'}^{\omega''} D\sigma Ds \quad (20)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$F = \varepsilon \{ Q(s'', s) - Q(s, s) \}. \quad (21)$$

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn der Inducen auf beliebige Weise verzweigt ist, unter der Voraussetzung, daß er keine Intensitätsveränderung erleidet und keine Gleitstellen besitzt. Man hat ihn in diesem Falle in einfache Umgänge zu zerlegen, für jeden derselben gilt die Gleichung (20) und die Summe dieser Gleichungen giebt den Ausdruck (21).

Die Übereinstimmung der Formeln (13), (17) und (21) mit denen in den früheren §§ ist vollständig. Anders verhält es sich mit der Gleichung (19), welche die von einem einfachen Strom-Umgang inducirte elektromotorischen Kraft unter der Annahme ausdrückt, daß derselbe aus einem bewegten Leiterstück mit den Grenzen σ , und σ'' und einem ruhenden besteht. Die dieser Gleichung entsprechende, wie sie aus meinem Induktions-Gesetz

sich ergibt, wird aus der Gleichung (5) in § 2 abgeleitet, indem diese auf Doppel-Integrale zurückgeführt wird. Man erhält aus derselben:

$$(22) \quad E = \frac{1}{2} \varepsilon \sum S \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right]_{\sigma,}^{\omega,} D\sigma Ds \\ - \frac{1}{2} \varepsilon \sum S \int \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} \right]_{\sigma,}^{\sigma,} Ds \partial\omega.$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks für E mit dem von $F = iE$ in (19) zeigt den wesentlichen Unterschied, daß die beiden letzten Doppel-Integrale das entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dieser Unterschied tritt am reinsten hervor, wenn man die beiden Formeln auf solche Induktionsfälle anwendet, in welchen die von den Strom-Elementen durchlaufene Wege geschlossene Bahnen sind, d. h. wo jedes Strom-Element zur Zeit t , sich an demselben Ort befindet, von welchem es zur Zeit t , ausging; dann fallen ω , und ω , zusammen und man hat nach (19)

$$(23) \quad F = \frac{1}{2} \varepsilon i \sum S \int \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} \right]_{\sigma,}^{\sigma,} Ds \partial\omega$$

dagegen nach (22)

$$(24) \quad F = iE = - \frac{1}{2} \varepsilon i \sum S \int \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} \right]_{\sigma,}^{\sigma,} Ds \partial\omega.$$

Es ist also die Summe der elektromotorischen Kraft, welche während des Umlaufs der Elemente des Inducen ten erregt wird, nach beiden Formeln dieselbe, die Richtung des inducirten Stroms aber die entgegengesetzte. Die Beobachtung entscheidet für die Formel (24). Es muß also untersucht werden, worin bei Ableitung der Formel (23) aus Weber's Grundgesetz gefehlt worden ist. Der Umstand, daß der in Rede stehende Widerspruch nur bei Inducen ten mit Gleitstellen eintritt, führt die Betrachtung sogleich auf diese. Hier treten neue Elemente in die Strombahn ein, oder heraus, in welchen also die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von o bis i oder von i bis o verändert; und die durch diese ihre Intensitäts-Veränderung einen inducirenden Effekt ausüben, welcher in meinen Formeln schon enthalten

ist, der aber bei der Anwendung des Weber'schen Grundgesetzes noch berücksichtigt werden muß.

Um den Erfolg dieser Berücksichtigung in einem einfachen Beispiel kennen zu lernen, werde ich die elektromotorische Kraft bestimmen, welche hiernach zu dem durch (19) gegebenen Werth von F in dem in Fig. 8. dargestellten Induktionsfall noch hinzuzufügen ist. Hier stellt $\alpha\beta\gamma$ den inducierenden Strom vor, die Induktion wird durch Fortführung des Bahnstücks $\beta\gamma$ aus der Anfangsposition β,γ , in die Endposition $\beta,,\gamma,,$ erregt, wobei die Intensität des Stroms i unverändert bleiben soll. Die End-Elemente dieses bewegten Stücks bei β und γ sollen dieselben bleiben, sie gleiten auf den ruhenden Unterlagen $\beta,\beta,,$ und $\gamma,\gamma,,$ und bringen deren Elemente nach und nach in die Strombahn. In jedem dieser Elemente wird in dem Augenblick seines Eintritts in diese Bahn ein Strom erregt, der in einer äußerst kurzen Zeit die Intensität i erreicht. Ich werde die Elemente von $\beta,\beta,,$ durch $\partial\beta$ und die von $\gamma,\gamma,,$ durch $\partial\gamma$ bezeichnen. Die elektromotorische Kraft, welche durch die Strom-Veränderung des Elements $\partial\beta$ von 0 bis i in dem Leiter s inducirt wird, ist $\partial\beta \int S E_{\eta} \partial t Ds$, worin der Werth von E_{η} aus (7a) zu setzen ist mit Rücksicht darauf, daß $\frac{dw}{dt} = 0$ und $\frac{do}{dt} = 0$ ist. Dies giebt

$$\partial\beta \int S E_{\eta} \partial t Ds = \frac{1}{2} \epsilon \partial\beta \int S \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\beta} \frac{di}{dt} \partial t Ds$$

oder, indem die Integration nach ∂t ausgeführt wird

$$= \frac{1}{2} \epsilon i \partial\beta S \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\beta} Ds.$$

Vertauscht man hierin β mit γ , so erhält man den Ausdruck für die elektromotorische Kraft, welche in s durch die Strom-Veränderung des Elements $\partial\gamma$ von 0 bis i erregt wird. Von diesen Ausdrücken sind die Summen nach $\partial\beta$ zwischen $\beta,$ und $\beta,,$ und nach $\partial\gamma$ zwischen $\gamma,,$ und $\gamma,$ zu nehmen, um die durch die Unterlagen $\beta,\beta,,$ und $\gamma,\gamma,,$ inducirte elektromotorische Kraft zu erhalten; hiebei ist angenommen, daß der inducirende Strom in dem bewegten Bahnstück von β nach γ fliesse, und er also die erste Unterlage nach der Richtung von $\beta,$ nach $\beta,,$, die zweite in der Richtung von $\gamma,,$ nach $\gamma,$ durchströme. Diese Summen müssen zu dem in (19) für F gegebenen Werthe noch hinzuaddirt werden. Dies giebt

$$\begin{aligned}
 (25) \quad F = & \frac{1}{2} \epsilon i \sum_{\omega} S \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds} \right] D\sigma Ds \\
 & + \frac{1}{2} \epsilon i S \int_{\sigma}^{\sigma''} \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} \right] Ds \partial\omega \\
 & + \frac{1}{2} \epsilon i \int_{\beta}^{\beta''} S \frac{1}{r} \frac{dr}{d\beta} \frac{dr}{ds} \partial\beta Ds - \frac{1}{2} \epsilon i \int_{\gamma}^{\gamma''} S \frac{1}{r} \frac{dr}{d\gamma} \frac{dr}{ds} \partial\gamma Ds
 \end{aligned}$$

und hieraus erhält man

$$\begin{aligned}
 (26) \quad F = & \frac{1}{2} \epsilon i \sum_{\omega} S \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds} \right] D\sigma Ds \\
 & \text{da die übrigen Glieder sich zerstören. Denn indem man das Zeichen } [] \text{ auf-} \\
 & \text{löst, ist } S \int_{\sigma}^{\sigma''} \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} \right] Ds \partial\omega \\
 & = S \int_{\sigma''} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} \right) Ds \partial\omega - S \int_{\sigma} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} \right) Ds \partial\omega
 \end{aligned}$$

und hierin ist $\partial\omega$ in dem ersten Gliede das Element des Weges, welchen das Ende σ'' durchläuft, in dem zweiten Gliede ist $\partial\omega$ das Element des Weges, auf welchem das untere Ende σ , des bewegten Bahnstücks $\beta\gamma$ bewegt wird. Diese Wege-Elemente sind aber respektive identisch mit $\partial\gamma$ und $\partial\beta$, so daß

$$\begin{aligned}
 \text{man auch schreiben kann } & S \int_{\sigma}^{\sigma''} \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} \right] Ds \partial\omega \\
 & = S \int \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\gamma} Ds \partial\gamma - S \int \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\beta} Ds \partial\beta.
 \end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth in (25), so ergibt sich die Gleichung (26). Wenden wir diese Gleichung auf den oben behandelten Fall an, in welchem die Elemente des bewegten Bahnstücks geschlossene Bahnen durchlaufen, so finden wir für die elektromotorische Kraft, welche während eines ganzen Umlaufs des Bahnstücks in s erregt wird, statt des Ausdrucks in (23) diesen:

$$(27) \quad F = 0$$

da jetzt für alle Elemente $D\sigma$ gleichzeitig ω , mit ω , zusammenfallen.

Zwischen den dreierlei Ausdrücken für die in einem bestimmten Falle inducirte elektromotorische Kraft in (23), (24) und (27) mußte durch die Erfahrung entschieden werden. Ich sagte bereits, daß diese zu Gunsten meiner Formel in (24) entschieden habe. Ich werde, obgleich ich die Beschreibung von Experimenten aus dieser Abhandlung ausgeschlossen habe, in diesem Falle, wegen seiner Wichtigkeit, die Vorrichtung, deren ich mich zur Prüfung der in Rede stehenden Formeln bedient habe, in kurzen Umrissen angeben.

In Fig. 9 ist ein Theil des Schließungsdraths einer galvanischen Kette α ringförmig $\beta\gamma\delta$ gebogen; das Ende δ dieses Ringes reicht sehr nahe an seinen Anfang β , ohne mit ihm in leitender Verbindung zu stehen. Eine im Mittelpunkt des Ringes senkrecht auf seiner Ebene stehende rotirende Axe $\epsilon\eta$ führt das bewegliche Bahnstück $\epsilon\gamma$ mit sich im Kreise herum und zwar so, daß sein Ende in γ auf dem Ringe schleifend fortgeführt wird. Der inducirende Strom tritt, von α kommend, bei β in den Ring und bei γ aus ihm heraus in das bewegliche Bahnstück, aus diesem in die leitende Axe $\epsilon\eta$, bei η kehrt er durch die ruhende Drathleitung $\eta\zeta$ nach α zurück. Diese Richtung des Stroms ist durch die Pfeile in der Figur angedeutet. Concentrisch um den Ring liegt ein kreisförmiger Leiter bcd , in welchem durch die Bewegung des Bahnstücks $\epsilon\gamma$ ein Strom inducirt wird. Wenn das bewegliche Bahnstück von β über γ bis δ fortgeführt ist, kann die Bahn desselben, wegen der geringen Entfernung von δ bis β , als geschlossen angesehen werden, und deshalb können die in (23), (24), (27) gegebenen Formeln zur Bestimmung der während eines Umlaufs entwickelten elektromotorischen Kraft angewandt werden. In Beziehung auf die Formeln in (23) und (24) muß man bemerken, daß das mit σ , bezeichnete Ende des beweglichen Bahnstücks $\gamma\epsilon$ das Ende ϵ , welches in der rotirenden Axe $\epsilon\eta$ liegt, ist, in Beziehung auf welches also $\partial\omega = 0$ ist. Demnach verwandelt sich (23) in

$$F = -\frac{1}{2}\epsilon i S \int \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} Ds \partial\omega \quad (28)$$

und meine Formel in (24) in

$$F = \frac{1}{2}\epsilon i S \int \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} Ds \partial\omega \quad (29)$$

während die Formel (27) $F = 0$ giebt. In den vorstehenden Integralen ist $\partial\omega$ das Element des Ringes $\beta\gamma\delta$, und die Integration nach diesem Element ist auf den ganzen Ring auszudehnen. Aus der Formel (29), welche für F das mit ε multiplicirte Potential des vom Strome i durchströmten Ringes $\beta\gamma\delta$ in Bezug auf den von der Strom-Einheit durchströmten Leiter giebt, folgt eine negative Richtung des inducirten Stroms bcd , dessen positive Richtung in demselben Sinne wie bei dem inducirenden Strome, nemlich von b nach c gerechnet, dagegen (28) zwar dieselbe elektromotorische Kraft, aber die entgegengesetzte Stromrichtung giebt. Um Richtung und Gröfse des inducirten Stroms zu beobachten, war folgende Einrichtung getroffen. Der inducirte kreisförmige Leiter war bei b unterbrochen, und hier mit zwei Fortsätzen e und f versehen, von denen einer unmittelbar mit dem einem Ende des Multiplikatordraths in Verbindung stand, der andere aber zu einer Metallfeder ging, welche in schleifender Berührung mit einer Metall-Hülse stand, die isolirt auf die rotirende Axe $\varepsilon\eta$ gesteckt war. Der inducirte Strom ging also durch diese Feder in die Hülse, trat aus dieser durch eine zweite gegen sie drückende Metallfeder wieder heraus, und ging aus dieser zu dem andern Ende des Multiplikatordraths. Die Hülse hatte einen Ausschnitt, der mit Holz ausgefüllt war, auf welche die eine Feder in dem Augenblick lag, als das bewegliche Bahnstück $\gamma\varepsilon$ bei δ den Ring $\beta\gamma\delta$ verlief, um bei β von Neuem mit ihm in leitender Verbindung zu treten. In diesem Augenblick nemlich wird die Schließung des Inducenten unterbrochen, und wieder hergestellt, es verschwindet sein Strom, und er tritt wieder auf, dadurch wird aber in dem Leiter keine Induktion erregt, weil er ihr, nach der eben angegebenen Vorrichtung, keine geschlossene leitende Bahn darbietet. Zum Multiplikator gelangt also nur der durch die Bewegung des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ inducirte Strom, und läßt, da er bei fortgesetzter Drehung der Axe $\varepsilon\eta$ immer in derselben Richtung fließt, Richtung und Intensität beobachten. Die Beobachtung zeigte gegen die Formel (27) einen inducirten Strom, und, was die Richtung desselben betrifft, gab sie dieselbe, so wie meine Formel in (29) es fordert. Um zu beweisen, daß durch diese Formel nicht bloß die Richtung, sondern auch die Stärke des inducirten Stromes richtig ausgedrückt wird, wurde auf folgende Weise verfahren. Die Feder, welche die leitende Verbindung in der inducirten Strombahn unterbrach, wurde soviel höher

gestellt, daß sie den mit Holz ausgefüllten Ausschnitt der Hülse, durch den eben die Unterbrechung bewirkt wurde, nicht mehr traf. Den inducirten Strömen wird jetzt immer eine geschlossene Bahn geboten. Zum Multiplikator gelangen, bei fortgesetzter rascher Drehung der Axe $\varepsilon\eta$ drei Ströme innerhalb sehr kurzer Zeit, nemlich der durch die Bewegung des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ inducirte, dann der durch das Verschwinden des inducirenden Stroms inducirte, in dem Moment wo das bewegliche Bahnstück den Ring bei δ verläßt, und endlich der durch sein Wiederauftreten inducirte, sobald das Stück den Ring in β wieder erreicht. Die Kraft, welche von diesen drei Strömen während der kurzen Dauer eines Umlaufs des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ auf die Magnetnadel des Multiplikators ausgeübt wird, ist mit der Summe ihrer elektromotorischen Kräfte proportional; je nachdem das Vorzeichen dieser Summe positiv oder negativ ist, wird die Nadel auf der einen Seite oder der anderen des Meridians ihre beinahe feste Stellung nehmen, oder sie wird, wenn jene Summe $= 0$ ist, in ihrer Stellung im Meridian verharren.

Den Ausdruck für die durch das Verschwinden des Stroms inducirte elektromotorische Kraft erhält man aus (9) wenn darin $i_{\gamma} = 0$ $i_{\varepsilon} = i$ gesetzt, dies giebt

$$- \frac{1}{2} \varepsilon i \sum S \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} D\sigma Ds$$

Dieselbe Gleichung (9) wenn darin $i_{\gamma} = i$ und $i_{\varepsilon} = 0$ gesetzt wird, giebt die durch das Wiederauftreten des inducirenden Stroms erregte elektromotorische Kraft

$$\frac{1}{2} \varepsilon i \sum S \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} D\sigma Ds.$$

In dem ersten Ausdruck ist die Integration nach $D\sigma$ über die ganze inducirende Strombahn, einschließlic ihres ringförmigen Theils auszudehnen, in dem zweiten ist dieser ringförmige Theil auszuschließen. Daher giebt die Summe dieser beiden Ausdrücke ein entsprechendes Doppelintegral, in welchem die Integration nach $D\sigma$ auf die Elemente des Ringes $\beta\gamma\delta$ zu beschränken ist. Setzt man, um dies zn bezeichnen, in dieser Summe statt $D\sigma$ und $\sum$ respektive $\partial\omega$ und $\int$ so ist dieselbe

$$- \frac{1}{2} \varepsilon i S \int \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} Ds \partial\omega. \quad (30)$$

Addirt man diese elektromotorische Kraft zu derjenigen, welche durch die Bewegung eines Umlaufes des Bahnstücks $\gamma\epsilon$ erregt ist, so geben die Formeln (23), (24) und (27), als Summe der elektromotorischen Kräfte der drei aufgeführten Ströme, wenn diese Summe durch F , bezeichnet wird, respektive

$$F = \epsilon i S \int \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} Ds \partial\omega$$

$$F = 0$$

$$F = -\frac{1}{2} \epsilon i S \int \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} Ds \partial\omega$$

Die Beobachtung zeigt dafs, wenn die Drehung rasch geschieht, die Nadel im Meridian bleibt, also $F = 0$, wodurch die Richtigkeit meiner Formel in (24) sowohl in Beziehung auf die Richtung als die Stärke des inducirten Stroms erwiesen ist, da aus Beobachtungen anderer Art die Richtigkeit des Ausdrucks (30) festgestellt ist.

Webers Grundgesetz der elektrischen Wirkung hat sich in so vielen und verschiedenartigen Fällen bewährt, dafs dasselbe durch die vorstehenden Bemerkungen nicht zweifelhaft gemacht werden kann, vielmehr mufs die Art, wie es auf den vorliegenden Fall zur Anwendung gebracht ist, in Zweifel gezogen werden. Bei weiterer Reflexion über diese Anwendung, erregt der Gebrauch, welcher von der Gleichung (2) in (6) gemacht worden ist, Verdacht.

Folgende Betrachtung, die aber weniger durch ihre Evidenz, als durch ihren Erfolg gerechtfertigt wird, führt dahin, den Theil dieser Gleichung rechter Hand zu verdoppeln, wenn sie auf die Elemente in den Gleitstellen angewandt wird. Während des Zeit-Elements ∂t , in welchem ein Element der Gleitstelle in die Bahn des inducirenden Stroms eintritt, erlangt seine Elektricität den endlichen Zuwachs an Geschwindigkeit von 0 bis z . Dieser Zuwachs mufs angesehen werden als wäre er der Elektricität des Elements stetig ertheilt, so dafs derselbe $\frac{1}{n} z$ nach Verlauf von $\frac{1}{n} \partial t$ ist, weil nach $\frac{1}{n} \partial t$ erst der n te Theil des Elements der Gleitstelle in die Strombahn eingetreten ist. Die Elektricität dieses Elements kann also angesehen werden, als durchliefe sie während ∂t den Weg $\frac{1}{2} z \partial t$. Die Stromstärke desselben Elements erfährt während ∂t den endlichen Zuwachs von 0 bis i . Dieser Zuwachs ist propor-

tional mit der während ∂t durch das Element durchgeströmten Elektrizitätsmenge, dividirt durch ∂t , oder proportional mit dem durch ∂t dividirten Wege, welchen die Elektrizität des Elements während ∂t durchlaufen hat. Diesen Weg fanden wir $\frac{1}{2} v \partial t$, also ist $i = \frac{1}{2} \eta v = \frac{1}{2} \eta \frac{d\sigma}{dt}$. Demnach ist in der Gleichung (5), so fern sie auf Elemente in den Gleitstellen angewandt wird, statt der Gleichung (6) zu setzen: $\eta \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = 2 \frac{di}{dt}$.

Bringt man diese Bemerkung zur Anwendung auf den oben behandelten in Fig. 8 dargestellten Induktions-Fall, so ist in (25) der Theil der elektromotorischen Kraft, welcher von der Intensitäts-Veränderung der Elemente der Unterlage herrührt, zu verdoppeln. Dies trifft die Glieder dieser Gleichung, welche unter den Integralzeichen die partiellen Differentiale von r nach β und γ haben. Dadurch entsteht aus (25) statt der Gleichung (26) die folgende

$$F = \frac{1}{2} \epsilon i \sum_{\omega} S \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right]_{\omega} D\sigma Ds + \frac{1}{2} \epsilon i \int_{\beta}^{\beta''} S \frac{1}{r} \frac{dr}{d\beta} \frac{dr}{ds} \partial \beta Ds - \frac{1}{2} \epsilon i \int_{\gamma}^{\gamma''} S \frac{1}{r} \frac{dr}{d\gamma} \frac{dr}{ds} \partial \gamma Ds \quad (31)$$

welche, da

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \epsilon i \int_{\beta}^{\beta''} S \frac{1}{r} \frac{dr}{d\beta} \frac{dr}{ds} \partial \beta Ds - \frac{1}{2} \epsilon i \int_{\gamma}^{\gamma''} S \frac{1}{r} \frac{dr}{d\gamma} \frac{dr}{ds} \partial \gamma Ds \\ &= - \frac{1}{2} \epsilon i S \int_{\sigma}^{\sigma''} \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} \right]_{\sigma} Ds \partial \omega \end{aligned}$$

ist, mit meiner Formel in (22) identisch ist, und also als durch die Erfahrung bestätigt augesehn werden kann.

Macht man bei der Bildung des allgemeinen Ausdrucks für die inducirte elektromotorische Kraft von der Bemerkung Gebrauch, welche der Gleichung (31) zum Grunde liegt, so kömmt dies darauf hinaus, daß in (7a) statt des letzten Gliedes, welches den Faktor $\frac{di}{dt}$ enthält, in allen den Fällen,

wo dasselbe sich auf die Elemente bezieht, welche in den Gleitstellen nach und nach in die inducirende Strombahn eintreten oder heraustreten, dessen doppelter Werth gesetzt werden muß. Geschieht dies, so wird eine vollständige Übereinstimmung zwischen den Induktions-Formeln, die sich aus dem Weberschen Grundgesetz der elektrischen Wirkungen ableiten, und meinem allgemeinen Induktions-Theorem herbeigeführt. Diese Behauptung soll noch gerechtfertigt werden.

Betrachten wir den in Fig. 8 vorgestellten Induktions-Fall mit der Erweiterung, daß bei der Eortführung des Bahnstücks $\beta\gamma$ nach und nach mehr Elemente dieses Stücks in die Strombahn eintreten, und hierauf, wie ich der Einfachheit annehme, darin bleiben. Dann ist in (25), wenn das Glied

$$\frac{1}{2} \epsilon i \sum_{\omega} S \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right] D\sigma Ds$$

alle die Elemente des bewegten Bahnstücks umfaßt, welche vom Anfange bis zum Ende ihrer Bewegung innerhalb der Strombahn sich befinden, zu diesem Gliede noch in Beziehung auf die Elemente dieses Stücks $\beta\gamma$, welche erst, nachdem sie den Weg ω beschrieben haben, in die Strombahn eintreten, zu addiren die Gröfse:

$$+ \frac{1}{2} \epsilon i \sum_{\omega} S \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right] D\sigma Ds$$

und, wegen der Strom-Erregung in ihnen,

$$\epsilon i \sum_{\omega} S \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right) D\sigma Ds$$

Die Summe dieser beiden Gröfsen ist:

$$\frac{1}{2} \epsilon i \sum_{\omega} S \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right) D\sigma Ds + \frac{1}{2} \epsilon i \sum_{\omega} S \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right) D\sigma Ds$$

Die Parenthesen () mit ihren Indices ω , und ω bezeichnen, daß die Elemente $D\sigma$, auf welche die eingeschlossene Gröfse sich bezieht, respektive in ihren Endpositionen sich befinden, oder eben die Gleitstellen erreicht haben. Addirt man zu dem vorstehenden Ausdruck das zweite Glied in (25), nemlich

$\frac{1}{2}\epsilon i S \int \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} \right]_{\sigma''} Ds \partial \omega$ und nennt π und $\partial \pi$ die Unterlage der Gleitstelle und ihr Element, so erhält man

$$\frac{1}{2}\epsilon i \sum_{\omega''} S \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right) D\sigma Ds + \frac{1}{2}\epsilon i S \int \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\pi} \right]_{\sigma'} Ds \partial \pi$$

Wird hierzu endlich der doppelte Werth der beiden letzten Glieder in (25), nemlich

$$\begin{aligned} & \epsilon i \int_{\beta'}^{\beta''} S \frac{1}{r} \frac{dr}{d\beta} \frac{dr}{ds} \partial \beta Ds - \epsilon i \int_{\gamma'}^{\gamma''} S \frac{1}{r} \frac{dr}{d\gamma} \frac{dr}{ds} \partial \gamma Ds \\ & = - \epsilon i S \int \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\pi} \right]_{\sigma'} Ds \partial \pi \end{aligned}$$

und das erste Glied daselbst $\frac{1}{2}\epsilon i \sum_{\omega} S \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right] D\sigma Ds$ in der vorher angegebenen Beschränkung addirt, so erhält man

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2}\epsilon i \sum_{\omega''} S \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right] D\sigma Ds \\ & - \frac{1}{2}\epsilon i S \int \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\pi} \right]_{\sigma'} Ds \partial \pi \end{aligned}$$

worin nun in $\sum_{\omega} S \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{ds} \right] D\sigma Ds$ alle Elemente $D\sigma$ begriffen sind, welche bei der Anfangsposition des Bahnstücks $\beta\gamma$ und bei seiner Endposition sich innerhalb der inducirenden Strombahn befinden. Diese Gleichung ist identisch mit

$$F = j \{ P(\sigma'', s) - P(\sigma', s) \}.$$

Zu derselben Formel gelangt man, wenn die End-Elemente des bewegten Bahnstücks wiederholt in die Strombahn eintreten und heraustreten. Sie giebt überhaupt den Werth der elektromotorischen Kraft welche durch

einen Strom, dessen Bahn aus einem ruhenden und einem bewegten Bahnstück besteht, inducirt wird, ist aber, wie leicht ersichtlich, unmittelbar auf einen Inducenten anwendbar, der aus einer beliebigen Anzahl Bahnstücken zusammengesetzt ist, wenn die Unterlagen in den Gleitstellen ruhen. Durch dieselben indirekten Betrachtungen, welche in § 2 und § 3 angestellt sind, läßt sich aus der vorstehenden Formel der Werth von F in allen übrigen Fällen, nemlich in den Fällen wo die Unterlagen in den Gleitstellen bewegt werden, und in denen wo eine gleichzeitige Bewegung der Strom- und Leiter-Elemente stattfindet, ableiten, und diese führt natürlich zu den dort erhaltenen Resultaten.

Anmerkung.

Über den Werth des Potentials zweier geschlossenen elektrischen Ströme in Bezug auf einander.

Das Potential eines Systems von Kräften in Bezug auf einen Punkt definire ich als diejenige Funktion der Coordinaten dieses Punktes, welche in ihren negativen nach diesen Coordinaten genommenen partiellen Differentialquotienten die mit ihnen parallelen Componenten der Wirkung der Kräfte auf diesen Punkt darstellt. Diese Componenten sind positiv gerechnet wenn sie die Richtung der positiven Coordinaten haben. Wenn die Kräfte als Wirkungen von Massentheilen auf Massentheilen gedacht werden, wie z. B. die magnetischen und elektrostatischen, so wird angenommen, daß diese, je nachdem sie gleichartig oder ungleichartig sind, d. h. mit gleichen oder entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sind, sich abstoßen oder anziehen.

Das Potential eines Systems von Kräften in Bezug auf ein festes System von Punkten ist eine Funktion der sechs Größen, durch welche der Ort und die Lage dieses festen Systems bestimmt wird. Um diese Funktion zu definiren nehme ich an, daß der Ort des festen Systems durch drei rechtwinkliche Coordinaten a, b, c irgend eines zu dem Systeme gehörigen Punktes A bestimmt sei, und seine Lage durch die Richtung einer durch den Punkt A gehenden geraden Linie B welche mit dem System fest verbunden ist, und durch den Winkel ϕ , welche eine durch B gelegte mit dem System fest verbundene Ebene mit einer unveränderlichen mit B parallelen Ebene bildet. Die Richtung der Linie B sei durch α und β bestimmt. Das Poten-

tial eines Kräfte-Systems in Bezug auf das in Rede stehende feste System ist diejenige Funktion der sechs Elemente $a, b, c, \alpha, \beta, \phi$, deren negative partielle Differentialquotienten nach den Coordinaten a, b, c die Summe der mit diesen parallelen Componenten der Wirkung geben, welche die Kräfte auf das System ausüben, und deren negativer partieller Differentialquotient nach ϕ das Drehungs-Moment der Kräfte um die Axe B darstellt.

Bezeichnet man durch σ und s die geschlossenen Bahnen zweier elektrischen Ströme, durch $D\sigma, Ds$ ihre Elemente und durch $(D\sigma \cdot Ds)$ den Winkel unter welchem diese Elemente gegeneinander geneigt sind, so hat, wenn i und j die Intensitäten der Ströme σ und s sind das Potential P des einen Stroms in Bezug auf den andern diesen Ausdruck:

$$P = -\frac{1}{2} S \sum ij \frac{\cos(D\sigma \cdot Ds)}{r} Ds D\sigma \quad (1)$$

worin

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \quad (2)$$

und x, y, z und ξ, η, ζ die Coordinaten von Ds und $D\sigma$ sind. Die Integrationen in (1) beziehen sich auf alle Elemente der geschlossenen Umgänge s und σ . Bei unverzweigten Strömen treten i und j aus den Integralzeichen heraus, weil sie hier unabhängig von σ und s sind, während sie bei verzweigten Strömen Funktionen der Zweige sind. Die letztern können aber immer in einfache Umgänge von konstanter Intensität zerlegt, und die Integrationen auf diese ausgedehnt gedacht werden. Dies ist bei den partiellen Integrationen im Folgenden geschehen. Ich werde zunächst beweisen, daß, wenn X, Y, Z die Summe der mit den Coordinatenachsen parallelen Componenten der Wirkung von σ auf s sind, und der Ort und die Lage von s durch $a, b, c, \alpha, \beta, \phi$ bestimmt sind, man hat

$$X = -\frac{dP}{da} \quad Y = -\frac{dP}{db} \quad Z = -\frac{dP}{dc}$$

Nach den Ampere'schen Formeln hat man, wenn durch $jX_\epsilon Ds, jY_\epsilon Ds, jZ_\epsilon Ds$ die Componenten der Wirkung von σ auf das Element Ds bezeichnet werden

$$X_\epsilon Ds = \frac{1}{2} \sum i \frac{\{(y - \eta) D\xi - (x - \xi) D\eta\} Dy}{r^3} + \frac{1}{2} \sum i \frac{\{(z - \zeta) D\xi - (x - \xi) D\zeta\} Dz}{r^3}$$

wofür, wie leicht zu ersehen ist, man schreiben kann

$$X_s Ds = -\frac{1}{2} \sum i \left\{ \frac{d\frac{1}{r}}{dx} Dx + \frac{d\frac{1}{r}}{dy} Dy + \frac{d\frac{1}{r}}{dz} Dz \right\} D\xi \\ + \frac{1}{2} \sum i \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \cos(Ds, D\sigma) Ds D\sigma$$

oder

$$X_s = -\frac{1}{2} \sum i \left\{ \frac{d\frac{1}{r}}{ds} D\xi - \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \cos(Ds, D\sigma) D\sigma \right\}.$$

Ebenso erhält man

$$(3) \quad Y_s = -\frac{1}{2} \sum i \left\{ \frac{d\frac{1}{r}}{ds} D\eta - \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \cos(Ds, D\sigma) D\sigma \right\} \\ Z_s = -\frac{1}{2} \sum i \left\{ \frac{d\frac{1}{r}}{ds} D\zeta - \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \cos(Ds, D\sigma) D\sigma \right\}$$

Bildet man jetzt den Werth von $X = S \int X_s Ds$, das Integral nach den einfachen geschlossenen Umgängen von s genommen, und berücksichtigt, daß innerhalb dieser Grenzen

$$S \sum \frac{d\frac{1}{r}}{ds} Ds D\xi = \sum \left[\frac{1}{r} \right]' D\xi = 0$$

wo die Klammer $[\]$ die Differenz der Werthe bezeichnet, welche die von ihr eingeschlossene Gröfse in den durch die beigefügten Indices angedeuteten Grenzen, zwischen welchen integriert ist, besitzt, so ergibt sich

$$X = \frac{1}{2} S \sum i j \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \cos(Ds, D\sigma) Ds D\sigma$$

wofür man schreiben kann, wenn $x = a + x_1$, $y = b + y_1$, $z = c + z_1$, gesetzt wird:

$$X = \frac{1}{2} \frac{d}{da} S \sum i j \frac{\cos(Ds, D\sigma)}{r} Ds D\sigma$$

oder in Rücksicht auf (1)

$$X = -\frac{dP}{da}.$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich $Y = -\frac{dP}{db}$ und $Z = -\frac{dP}{dc}$.

Um zu beweisen, daß $-\frac{dP}{d\phi}$ das Drehungs-Moment der Wirkung von

σ auf s in Bezug auf die Axe B ist, welche Lage diese auch hat, ist es hinreichend dies für die Fälle nachzuweisen, wo B mit einer der Coordinatenaxen parallel ist. Ich werde, je nachdem B mit der x , y oder z Axe parallel ist den Buchstaben ϕ mit λ , μ oder ν vertauschen, und ϕ nur für den allgemeinen Fall beibehalten. Die Drehungs-Momente in Bezug auf die durch den Punkt A gehenden mit x , y oder z parallelen Axen seien L , M , N .

Es sei B parallel mit der z Axe, so ist

$$N = Sj \{ (x - a) Y_\sigma - (y - b) X_\sigma \} Ds$$

und hierin die Werthe für Y_σ und X_σ aus (3) gesetzt:

$$N = -\frac{1}{2} S \sum ij \left\{ (x - a) \frac{d\eta}{d\sigma} - (y - b) \frac{d\xi}{d\sigma} \right\} \frac{d\frac{1}{r}}{ds} Ds D\sigma \\ + \frac{1}{2} S \sum ij \cos(Ds \cdot D\sigma) \left\{ (x - a) \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - (y - b) \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \right\} Ds D\sigma$$

Man erhält aber, wenn man partiell nach Ds innerhalb eines einfachen geschlossenen Umgangs integrirt

$$S \sum \left\{ (x - a) \frac{d\eta}{d\sigma} - (y - b) \frac{d\xi}{d\sigma} \right\} \frac{d\frac{1}{r}}{ds} Ds D\sigma \\ = \sum \left[\frac{(x - a) \frac{d\eta}{d\sigma} - (y - b) \frac{d\xi}{d\sigma}}{r} \right]_{s_1}^{s_2} D\sigma - S \sum \frac{1}{r} \left\{ \frac{dx}{ds} \frac{d\eta}{d\sigma} - \frac{dy}{ds} \frac{d\xi}{d\sigma} \right\} Ds D\sigma$$

worin, weil s_1 und s_2 zusammenfallen, der von S freie Theil verschwindet. Demnach wird

$$N = -\frac{1}{2} S \sum ij \frac{1}{r} \left\{ \frac{dx}{ds} \frac{d\eta}{d\sigma} - \frac{dy}{ds} \frac{d\xi}{d\sigma} \right\} Ds D\sigma \quad (4) \\ + \frac{1}{2} S \sum ij \cos(Ds \cdot D\sigma) \left\{ (x - a) \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - (y - b) \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \right\} Ds D\sigma.$$

Diese Gleichung ist identisch mit

$$N = \frac{1}{2} \frac{d}{d\nu} S \sum ij \frac{\cos(Ds \cdot D\sigma)}{r} Ds D\sigma.$$

Dies ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Man hat

$$\frac{d \frac{1}{r}}{dv} = \frac{d \frac{1}{r}}{dx} \frac{dx}{dv} + \frac{d \frac{1}{r}}{dy} \frac{dy}{dv} + \frac{d \frac{1}{r}}{dz} \frac{dz}{dv}$$

und, weil

$$\cos(Ds \cdot D\sigma) = \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{dx}{ds} + \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{dy}{ds} + \frac{d\zeta}{d\sigma} \frac{dz}{ds},$$

so ist:

$$\frac{d}{dv} \cos(Ds \cdot D\sigma) = \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{d}{ds} \frac{dx}{dv} + \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d}{ds} \frac{dy}{dv} + \frac{d\zeta}{d\sigma} \frac{d}{ds} \frac{dz}{dv}$$

und hieraus, da

$$\frac{dx}{dv} = -(y-b), \quad \frac{dy}{dv} = x-a, \quad \frac{dz}{dv} = 0$$

ergibt sich:

$$\frac{d \frac{1}{r}}{dv} = (x-a) \frac{d \frac{1}{r}}{dy} - (y-b) \frac{d \frac{1}{r}}{dx}$$

$$\frac{d}{dv} \cos(Ds \cdot D\sigma) = \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{dx}{ds} - \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{dy}{ds}$$

so dafs also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} S \sum ij \frac{\cos(Ds \cdot D\sigma)}{r} Ds D\sigma &= S \sum ij \frac{1}{r} \left\{ \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{dx}{ds} - \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{dy}{ds} \right\} Ds D\sigma \\ &+ S \sum ij \cos(Ds \cdot D\sigma) \left\{ (x-a) \frac{d \frac{1}{r}}{dy} - (y-b) \frac{d \frac{1}{r}}{dx} \right\} Ds D\sigma \end{aligned}$$

wodurch die Gleichung (5) erwiesen ist, für welche man auch schreiben kann

$$N = - \frac{dP}{dv}.$$

Giebt man der Axe B die Richtung von y oder x so erhält man auf dem entsprechenden Wege

$$M = - \frac{dP}{d\mu}, \quad L = - \frac{dP}{d\lambda}.$$

Bildet die Axe B mit x, y, z die Winkel l, m, n so ist, wenn das Drehungs-Moment in Bezug auf dieselbe jetzt mit R bezeichnet wird, nach einem bekannten Satze

$$R = L \cos l + M \cos m + N \cos n.$$

Nennt man $\partial\lambda$, $\partial\mu$, $\partial\nu$ die drei Drehungen um die durch den Punkt A gelegten x , y , z Axen welche die Drehung $\partial\phi$ um die Axe B ersetzen, so daß

$$\partial\lambda = \partial\phi \cos l \quad \partial\mu = \partial\phi \cos m \quad \partial\nu = \partial\phi \cos n$$

und setzt hieraus die Werthe von $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, so wie die vorher gefundenen Werthe für L , M , N in den vorstehenden Ausdruck für R , so erhält man

$$R = - \left\{ \frac{dP}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\phi} + \frac{dP}{d\mu} \frac{d\mu}{d\phi} + \frac{dP}{d\nu} \frac{d\nu}{d\phi} \right\}$$

d. i.

$$R = - \frac{dP}{d\phi}.$$



Ich benutze diese Gelegenheit um einige Sinn entstellende Druckfehler in meiner früheren Abhandlung: *die mathematischen Gesetze der inducirten Ströme etc.* 1845 anzugeben.

Die Formel (4) pag. 65 muß heißen:

$$J = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon' j \left\{ \sum \int \left[\frac{D\xi \partial x + D\eta \partial y + D\zeta \partial z}{r} \right]_{s,}^{s''} - \sum S \left[\frac{D\xi D_x + D\eta D_y + D\zeta D_z}{r} \right]_{\omega,}^{\omega''} \right\}$$

wo die Klammer [] immer die Differenz der Werthe bezeichnet, welche die eingeschlossene Gröfse an den Stellen besitzt, welche durch die der Klammer beigefügten Indices bezeichnet sind.

Die Formel (5) pag. 65 muß heißen:

$$J = - \frac{1}{2} \epsilon \epsilon' j \sum S \left[\frac{D\xi D_x + D\eta D_y + D\zeta D_z}{r} \right]_{\omega,}^{\omega''}$$

und (6) p. 67:

$$J = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon' j \sum \int \left[\frac{D\xi \partial x + D\eta \partial y + D\zeta \partial z}{r} \right]_{s,}^{s''}.$$



der mathematischen Theorie induktiver elektrischer Ströme.

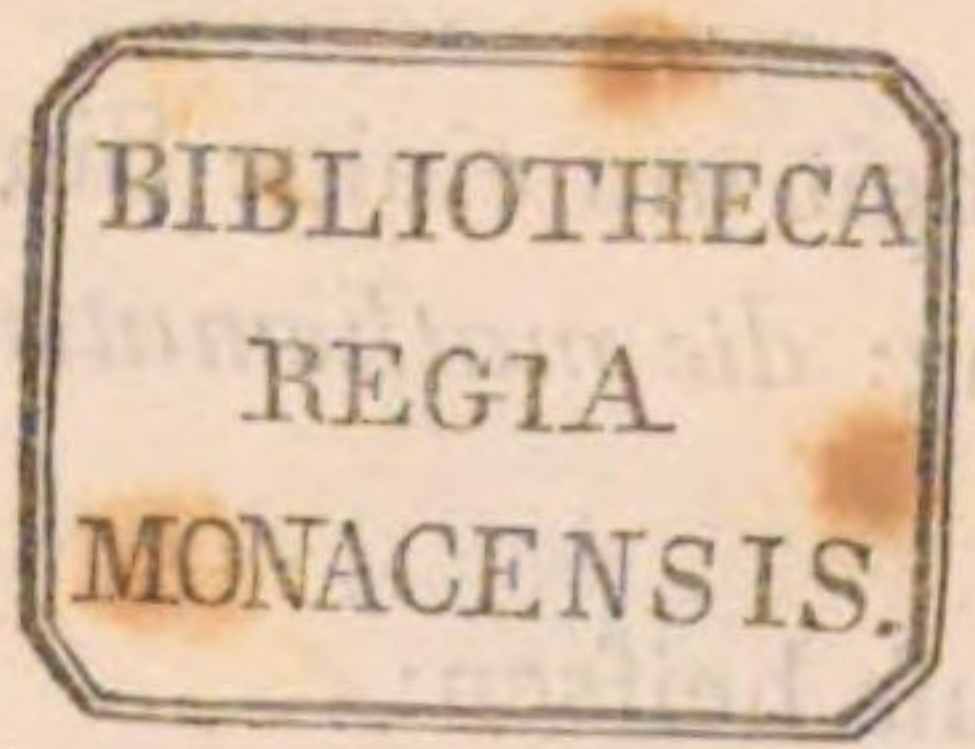
Nimmt man ϕ_1, ϕ_2 die die Induktion von der durch den Punkt A gelegenen ϕ_1 e. Axen welche die Induktion ϕ_2 in der Axen B ersetzen,

$$\phi_1 = \phi_2 \cos \alpha \quad \phi_2 = \phi_1 \cos \alpha \quad \phi_1 = \phi_2 \cos \alpha$$

und setzt man die Werte von ϕ_1, ϕ_2 in den vorstehenden Ausdruck für R , so erhält man

$$R = - \left\{ \frac{\phi_1 \phi_2}{\cos \alpha} + \frac{\phi_1 \phi_2}{\cos \alpha} + \frac{\phi_1 \phi_2}{\cos \alpha} \right\}$$

$$R = - \frac{\phi_1 \phi_2}{\cos \alpha}$$



Ich benutze diese Gelegenheit, um zu erklären, dass die in meinen früheren Abhandlungen über induktiven Strom etc. 1845 angegebenen Formeln (4) pag. 65 mit

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2 \sqrt{\frac{D_1^2 D_2^2 + D_1 D_2 + D_2^2}{D_1 D_2 + D_1 D_2 + D_2^2}}}{\frac{D_1^2 D_2^2 + D_1 D_2 + D_2^2}{D_1 D_2 + D_1 D_2 + D_2^2}} \right\}$$

wo die Klammern [] immer die Differenz der Werte bezeichnen, welche die eingeschlossenen Größen an den Stellen bezeichnen, welche durch die Klammern bezeichnet sind. Die Formel (5) pag. 65 muss heißen:

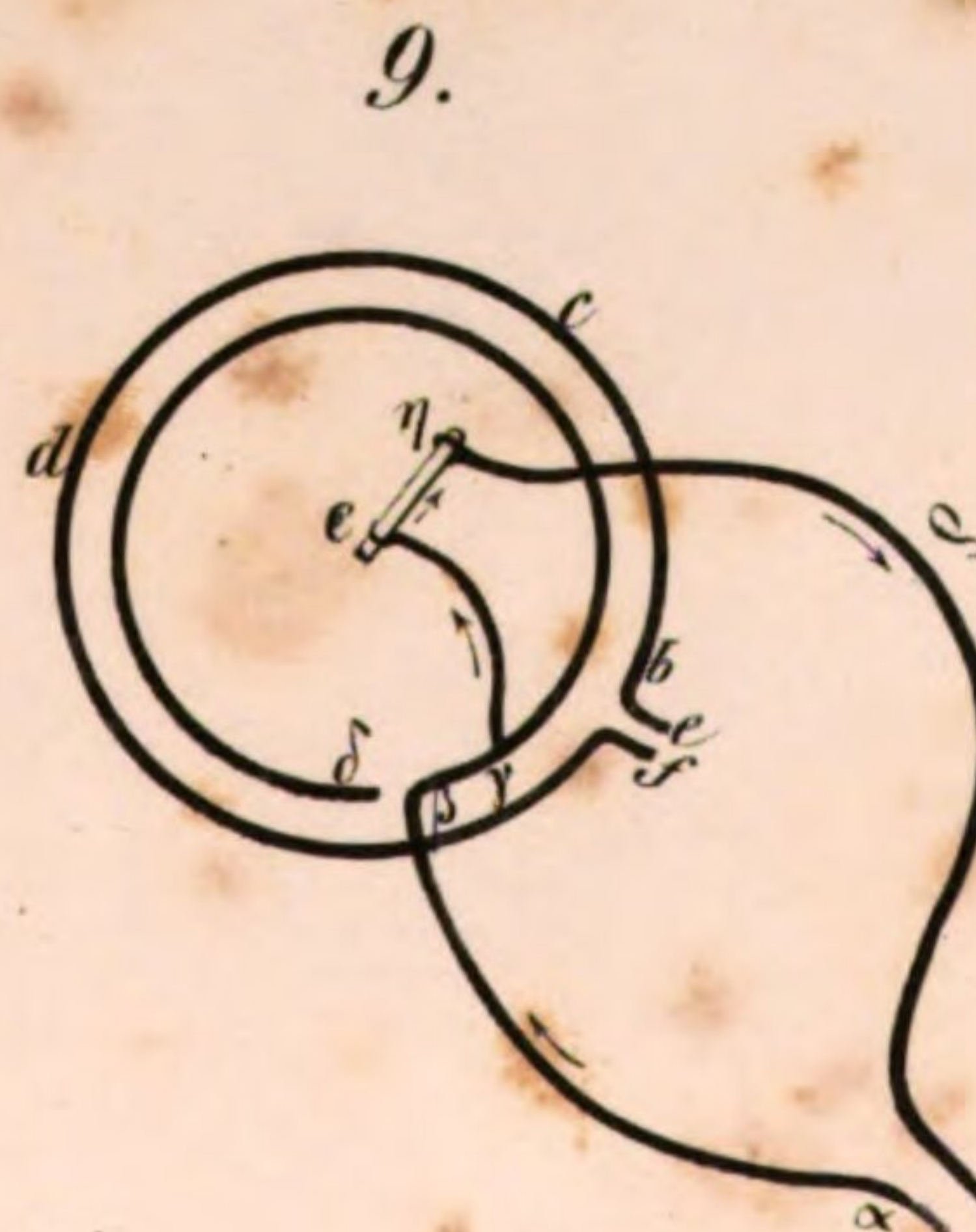
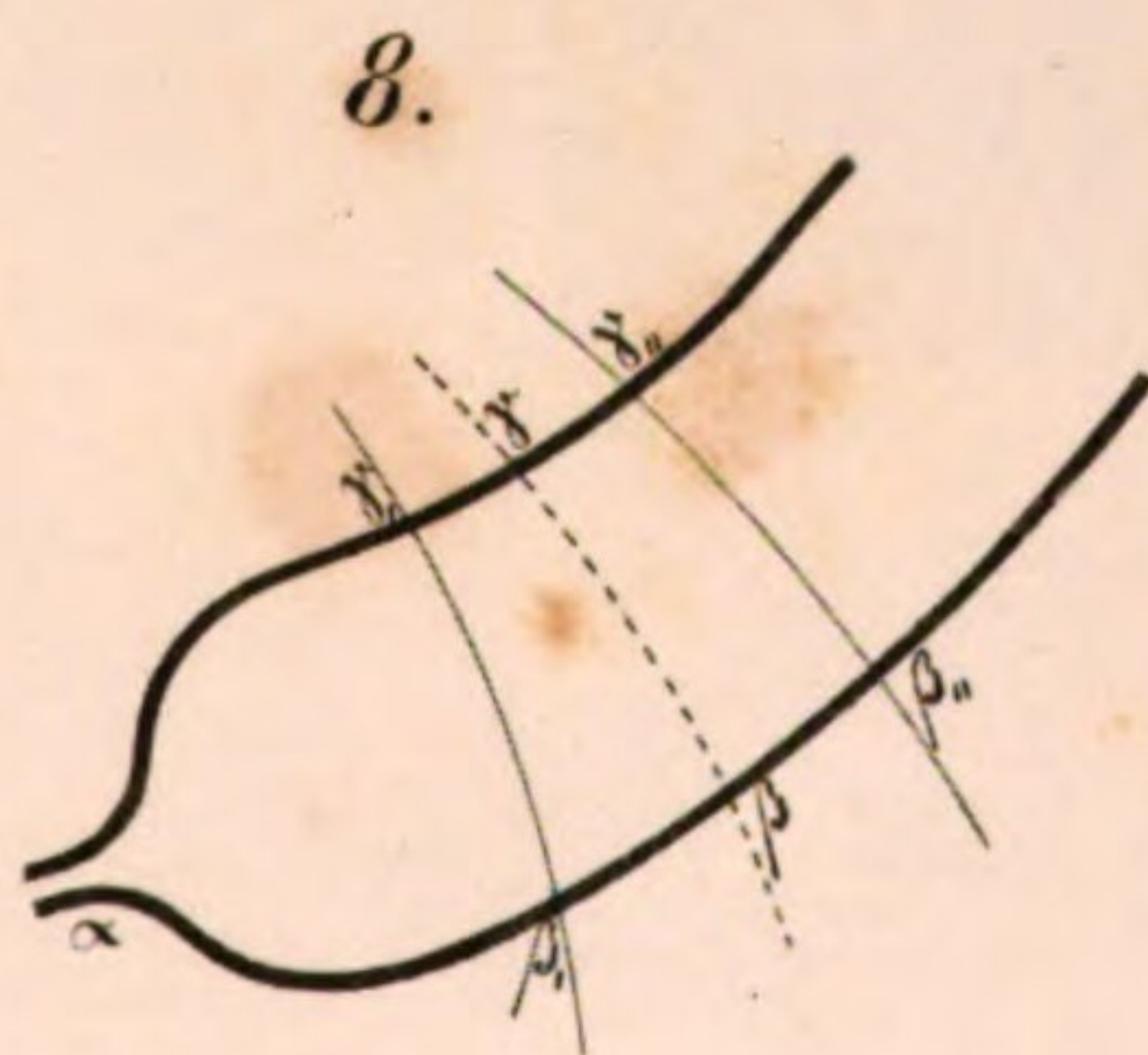
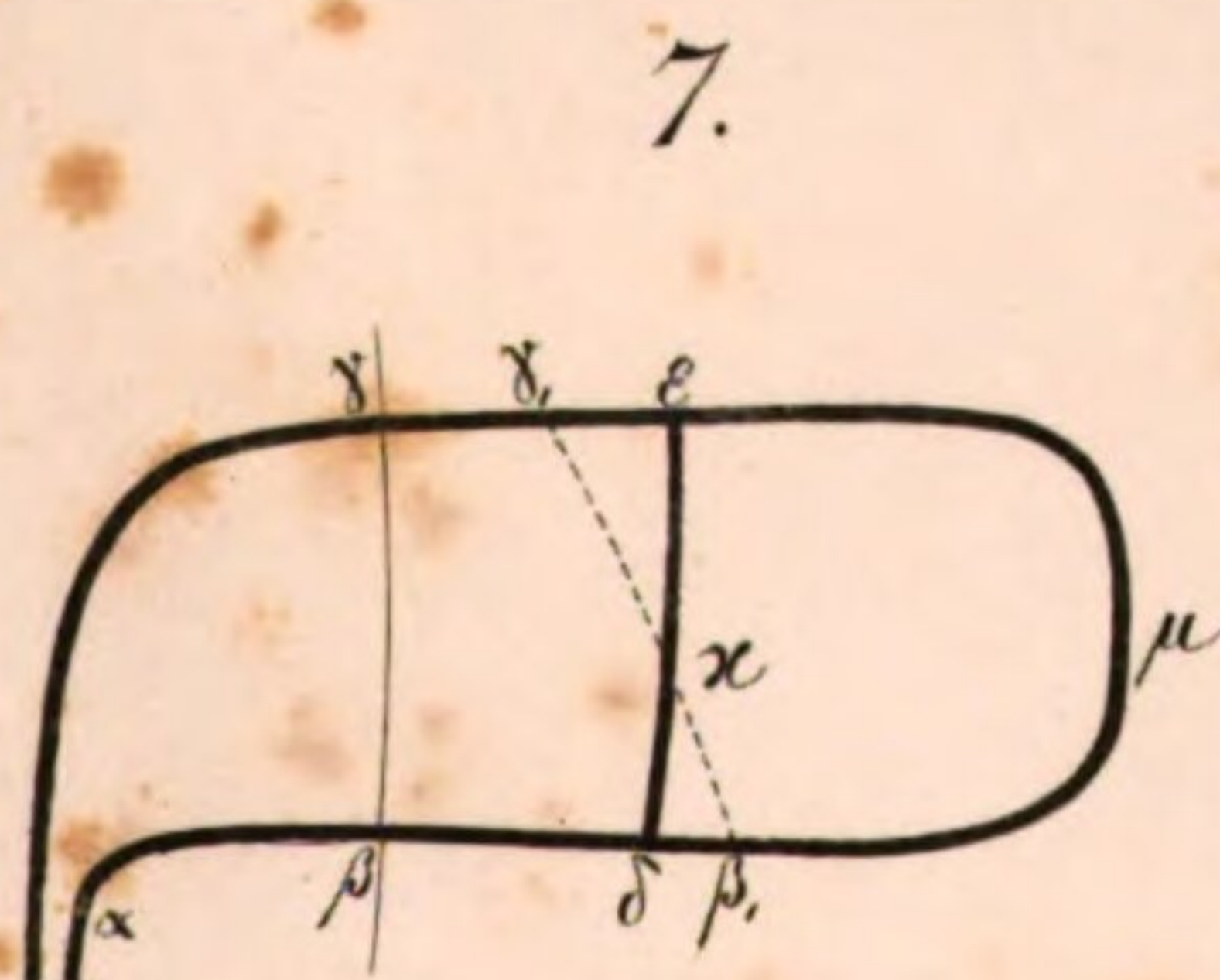
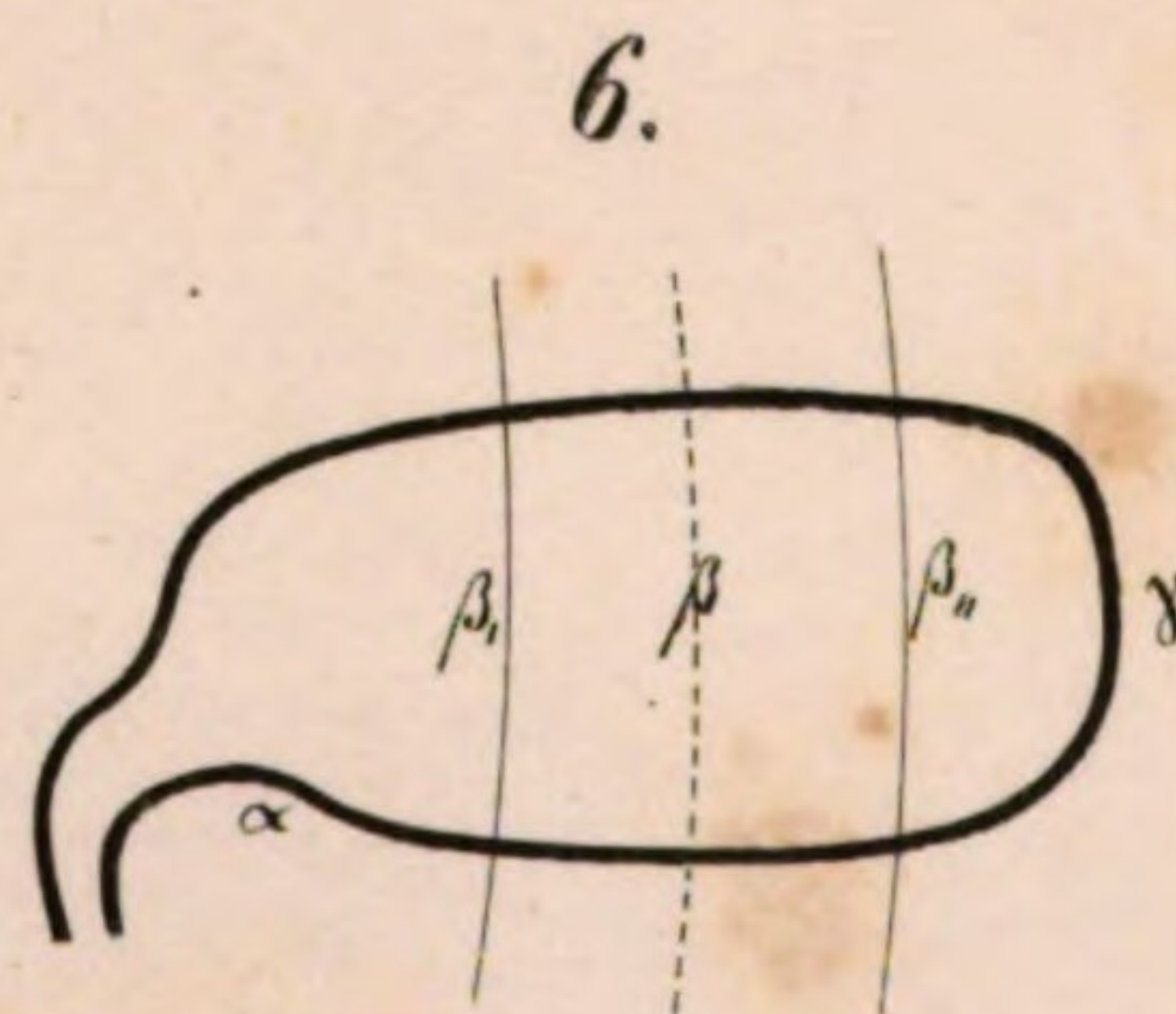
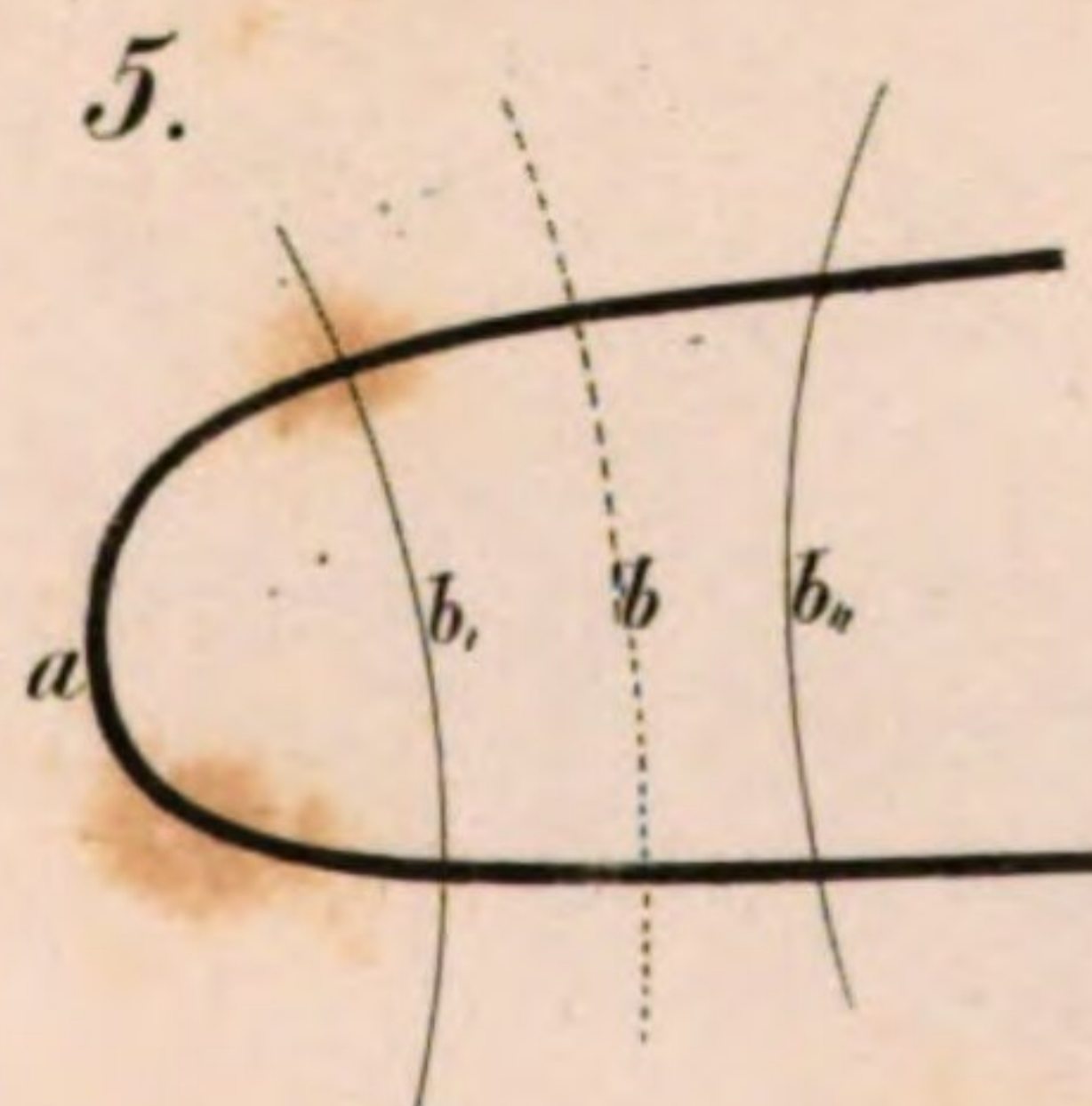
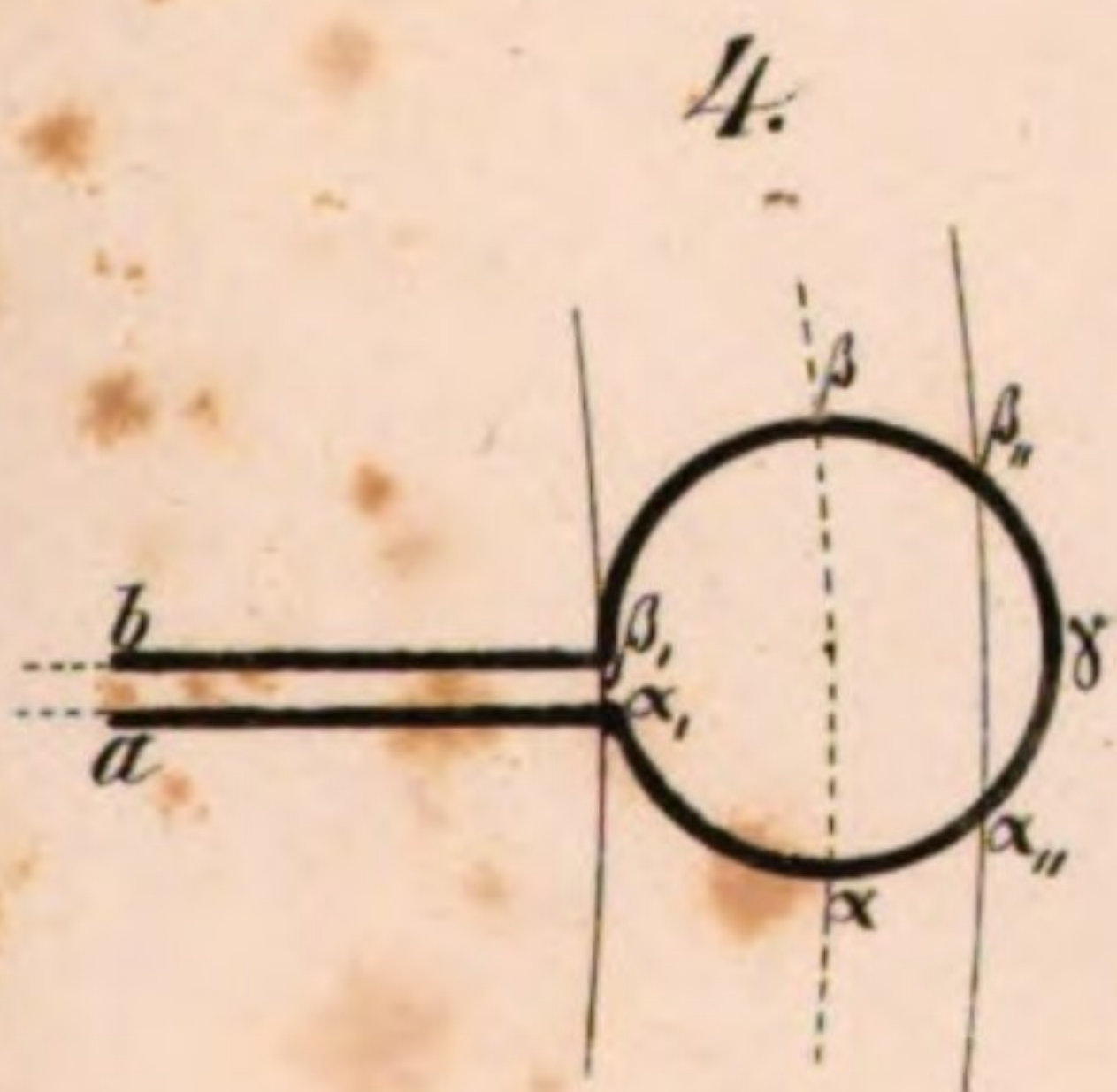
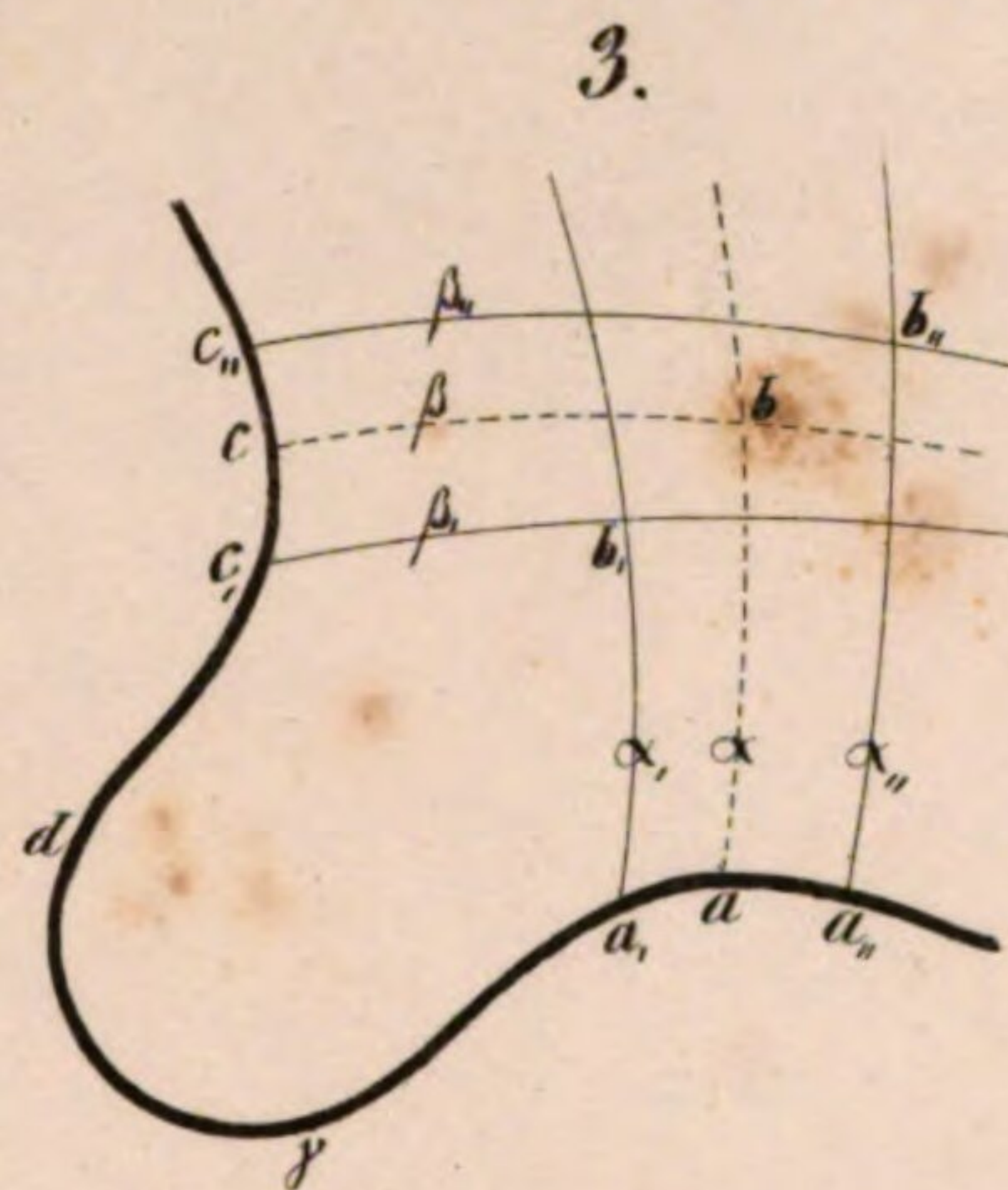
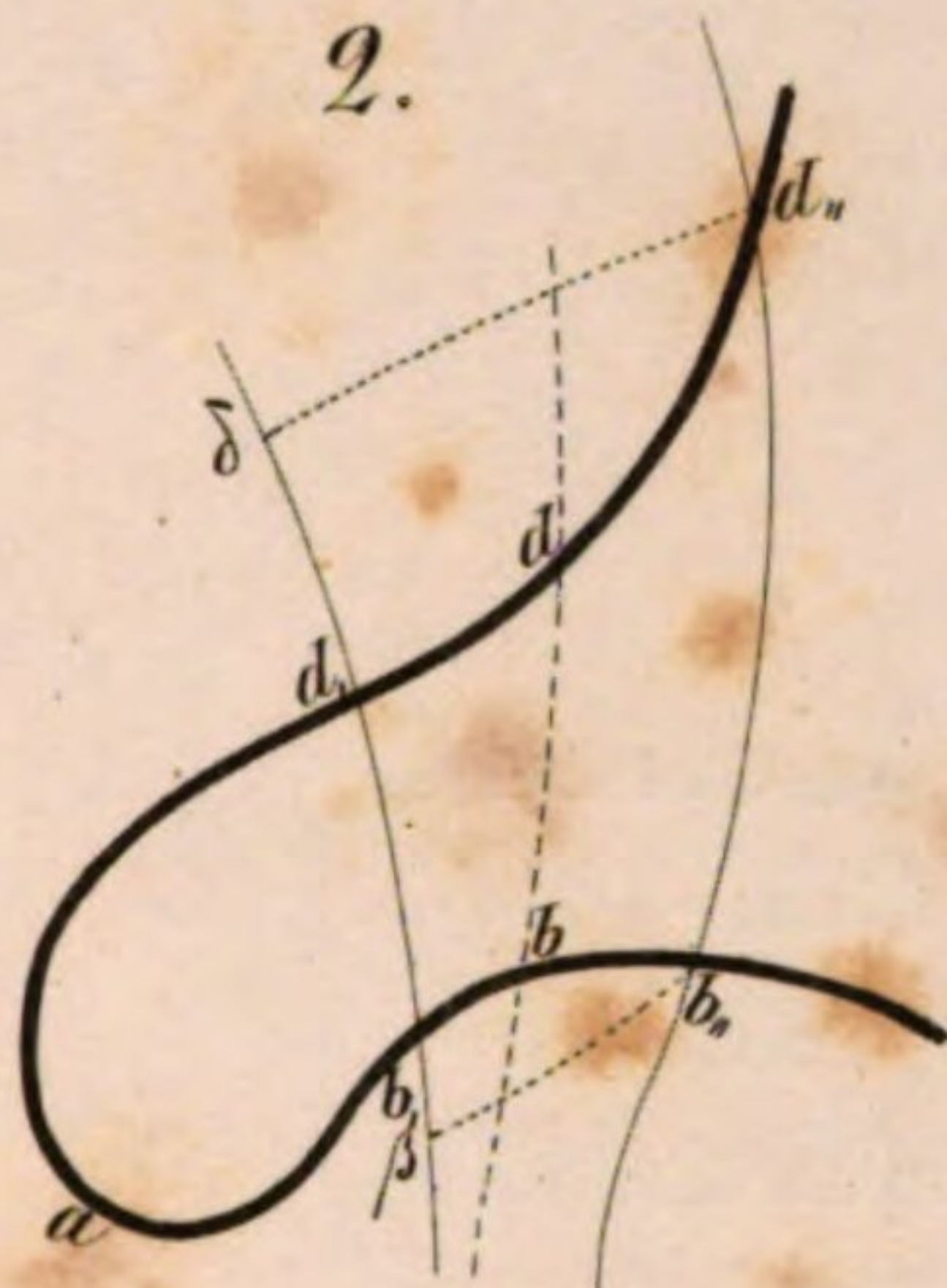
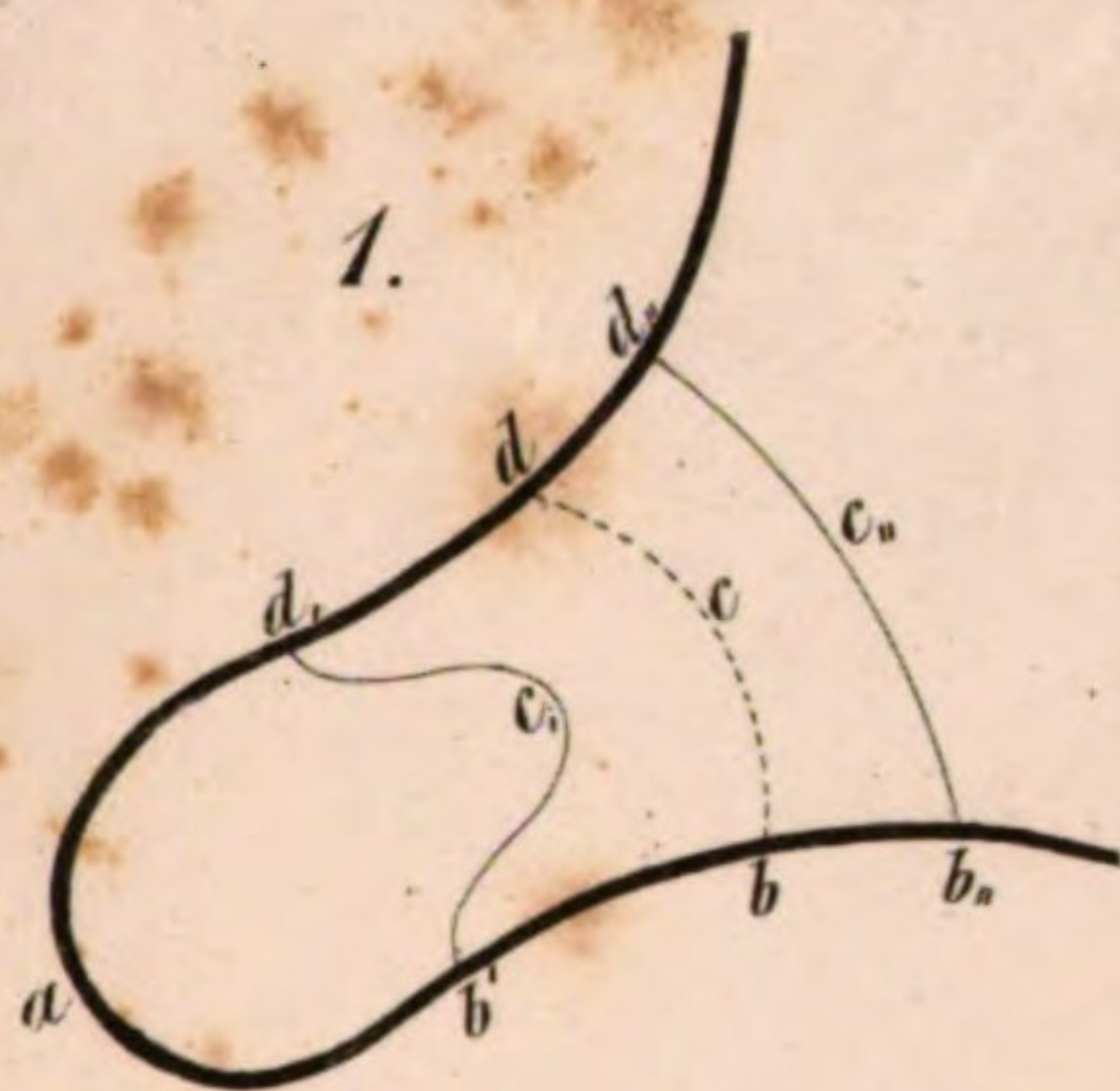
$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2 \sqrt{\frac{D_1^2 D_2^2 + D_1 D_2 + D_2^2}{D_1 D_2 + D_1 D_2 + D_2^2}}}{\frac{D_1^2 D_2^2 + D_1 D_2 + D_2^2}{D_1 D_2 + D_1 D_2 + D_2^2}} \right\}$$

und (6) p. 67:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2 \sqrt{\frac{D_1^2 D_2^2 + D_1 D_2 + D_2^2}{D_1 D_2 + D_1 D_2 + D_2^2}}}{\frac{D_1^2 D_2^2 + D_1 D_2 + D_2^2}{D_1 D_2 + D_1 D_2 + D_2^2}} \right\}$$

Zur Abhandlung des Hrn. Neumann

über ein allg. Princip der math. Theorie inducirt: elektr. Ströme. Phys. Abhdl. von 1847.



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.



Neumann, Franz Ernst,

Ueber ein allgemeines Princip der mathemat. Theorie inducirter
elektrischer Ströme Vorgelesen in der Berliner Akademie der Wissensch. am 9
Aug. 1847

Berlin 1848

4 Phys.sp. 181 b

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10058581-7